
DS début juin 3

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On pose pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in M_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} s_1(A) &= \sum_{j=1}^3 a_{1,j}, & s_2(A) &= \sum_{j=1}^3 a_{2,j}, & s_3(A) &= \sum_{j=1}^3 a_{3,j}, & (\text{somme des coefficients des lignes}) \\ s_4(A) &= \sum_{i=1}^3 a_{i,1}, & s_5(A) &= \sum_{i=1}^3 a_{i,2}, & s_6(A) &= \sum_{i=1}^3 a_{i,3}, & (\text{somme des coefficients des colonnes}) \\ s_7(A) &= \sum_{i=1}^3 a_{i,i}, & s_8(A) &= \sum_{i=1}^3 a_{i,4-i}, & & (\text{somme des coefficients des diagonales}) \end{aligned}$$

Pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui situé à l'intersection de la k -ième ligne et de la ℓ -ième colonne qui vaut 1.

On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base de $M_3(\mathbb{R})$; on note $\mathcal{B}$ cette base.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.

- a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
- b) Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Soit f l'application de $M_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui, à toute matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$, fait correspondre le vecteur

$$f(A) = (s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A))$$

de $\mathbb{R}^8$.

2. a) Montrer que f est une application linéaire.
b) On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$. Écrire la matrice F de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A).$$

- a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
- b) On note $\text{Ker } f$ le noyau de l'application linéaire f . Montrer que $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \text{Ker } f$.
- c) On note J la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{G}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de $\text{Ker } f$ et d'une matrice de $\text{Vect}(J)$.
- d) Quel est le rang de l'application f ?
- e) Déterminer la dimension de $\text{Ker } f$ ainsi qu'une base de $\text{Ker } f$.

PROBLÈME

- La notation $\exp$ désigne la fonction exponentielle.
- Les deux parties du problème sont très largement indépendantes.
- On rappelle que l'intégrale de Gauss converge, et vaut

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x) \ln(1-x).$$

- a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
- b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
- c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N . Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.

- d) En déduire pour tout $x \in [0, 1[$, un encadrement de $N(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$f(x) = -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}.$$

- a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f la fonction ainsi prolongée.
- c) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f .
Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$f'(x) = -\frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

- d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ dans $[1, +\infty[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1[$:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right).$$

- a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x)dx$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)dx.$$

- b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a :

$$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).$$

- c) En utilisant le résultat de l'intégrale de Gauss, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \leq 1.$$

4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{\ln(n+2)}.$$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.
- b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$. Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.
- c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités suivantes :

$$I_n \geq \int_0^{v_n} g_n(x)dx \geq \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right)dx \geq \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du.$$

- d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) \leq I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq 1.$$

- e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

Les notations sont identiques à celles de la Partie I.

5. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_0(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{et} \quad J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt.$$

- a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.
- b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!} x^n e^{-x}.$$

- c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.
- d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.
- e) À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n).$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- 6.
 - a) Rappeler, sans démonstration mais en citant le résultat de cours utilisé, la loi de la variable aléatoire S_n .
 - b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P([S_n \leq n])$ et $P([S_n \geq n])$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.
- 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que :

$$h_n(x) = x^n e^{-x}.$$

- a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.
- b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$P([S_{n+1} \leq n+1]) - P([S_n \leq n]) = -\frac{1}{(n+1)!} \left(\int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt \right).$$

- c) En déduire que la suite $(P([S_n \leq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
 - d) Étudier la monotonie de la suite $(P([S_n \geq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - e) Montrer que les deux suites $(P([S_n \leq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(P([S_n \geq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes.
8. a) On admet que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([S_n \leq n]) = \frac{1}{2}.$$

En déduire, à l'aide des questions 4 et 5, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- b) Donner un équivalent et la limite de $P([S_n = n])$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- c) Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([S_n \geq n]).$$