
DS début juin 2

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème EDHEC Math Appro 2024

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. On a donc $u_0 = 1$.

- 1) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) a) Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$, on a l'inégalité : $e^{x/2} \leq 1 + x$.
b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'inégalité : $u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$.
c) On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$.

Donner la valeur, pour tout entier naturel n non nul, de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt$.

- d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie 2

- 3) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est convergente.

Pour toute la suite, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

- 4) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$
b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
- 5) a) Montrer, grâce à une intégration par parties effectuée dans J_n , que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$
b) Déterminer J_1 .
c) Montrer que la série de terme général $\frac{J_n}{n}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi$.
d) Utiliser la relation de la question 5a) pour compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la valeur de J_n .

```
def suiteJ(n):  
    J=----  
    for k in range(2,n+1):  
        J=----  
    return J
```

- 6) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de "piles" (resp. "faces") obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

- 7) a) Donner, en justifiant, la loi de X_n .
b) Montrer que $P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n)$.
c) Justifier sans calcul l'égalité $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$.
d) Montrer que la probabilité d'obtenir strictement moins de "piles" que de "faces" lors de l'expérience décrite plus haut tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 8) Pour tout entier naturel k non nul, on considère la variable aléatoire Z_k qui vaut 1 si l'on a obtenu "pile" au k^e lancer et 0 sinon.

- a) Vérifier que l'on a $\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n$.

b),c) Les deux dernières questions du sujet sont pour l'année prochaine ;)

Exercice 3 EDHEC ECS 2018

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.

Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O .

Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \dots, n$.

Pour tout entier naturel n , on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).

On admet que, pour tout entier naturel n , X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

- 1)
 - a) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n .
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
- 2) On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
 - a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y = n)$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$.
 - b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.
 - c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.
 - d) La variable Y admet-elle une espérance?
- 3)
 - a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.
 - b) En déduire que : $\forall j \geq 2, \quad \ln j \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln j + 1 - \frac{1}{j}$.
 - c) Conclure alors que : $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \ln j$.
- 4) On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
 - a) Déterminer pour tout $i \geq j$, la probabilité $P_{(Y=i)}(Z = j)$.
 - b) Établir que : $\forall i \leq j-1, \quad P_{(Y=i)}(Z = j) = \frac{i+1}{j(j+1)}$.
 - c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z = j)$ comme une somme finie.
 - d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance?

5) Informatique

On rappelle qu'en Python, l'instruction `rd.randint(a,b+1)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $\llbracket a, b \rrbracket$.

- a) Écrire des commandes Python calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son n^e déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.
- b) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z .

```
n = 0
a = 0
while a < 2:
    n = n+1
    if rd.randint(0,n+1) == 0:
        a = a+1
        if a == 1:
            y = n
print("y=", ---)
print("z=", ---)
```

Problème EDHEC ECS 2018

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

- 1) a) Calculer u_0 et u_1 .
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
- 2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.
c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.
d) En déduire la valeur de u_{2n+1} .
- 3) a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}$.
b) En déduire, par encadrement, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
c) Montrer enfin que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- 4) Utiliser la question 2c) pour compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent de calculer u_n lorsque n est entré par l'utilisateur.

```
n = int(input('entrez la valeur de n : '))
u = np.pi/2
for -----
    -----
print(u)
```

Partie 2

On note f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 5) Démontrer que f est positive, possède un nombre fini de discontinuité, et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
- 6) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
- 7) a) Démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge, et calculer cette intégrale.
b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge, et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \right)^2$.
- 8) ¹ Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère une suite $(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n})$ de variables aléatoires toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
On pose : $I_n = \min(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n})$.
a) Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $P(I_n \geq k)$.
b) En déduire que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $P(I_n = k) = \left(\frac{n-k+1}{n} \right)^n - \left(\frac{n-k}{n} \right)^n$.
c) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $P\left(\frac{I_n}{n} > \varepsilon\right) \leq (1-\varepsilon)^n$ pour tout entier n assez grand.
d) En déduire que la suite $\left(\frac{I_n}{n}\right)_{n \geq 2}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire constante que l'on précisera.
e) Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite $(I_n)_{n \geq 2}$?

9) Simulation.

On rappelle que la commande `rd.randint(a,b,N)` renvoie un **array** contenant N simulation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b-1 \rrbracket$.

1. Pas l'énoncé original - je l'ai modifié pour le rendre faisable en première année

- a) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire I_n .

```
def simul_I(n):  
    X = rd.randint(1,n+1,n)  
    I = ---  
    return I
```

- b) Compléter les commandes Python suivantes afin de simuler N réalisations de la variable aléatoire $\frac{I_n}{n}$.

```
def simul(n,N):  
    L = np.zeros(N)  
    for k in range(N):  
        L[k] = --- / n  
    return L
```

- c) Que doit-on observer lorsque n devient grand ?