
DS début juin 1

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 Ecricone Math appli 2024

Pour toute variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout entier naturel k , on pose :

$$R_X(k) = \mathbb{P}(X > k).$$

La partie II est indépendante des autres parties ; les résultats de la partie I pourront intervenir dans les parties III et IV.

Partie I

- Soit p un réel de $]0, 1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p .
 - Calculer $R_X(k)$ pour tout entier naturel k .
 - Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1 - p$.
- Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
 - Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ à l'aide de la fonction R_X .
 - En déduire que X et Y suivent la même loi si et seulement si, pour tout entier naturel k , $R_X(k) = R_Y(k)$.

Partie II

- Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$.
 - En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.
- Dans cette question, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}.$$

- Montrer que la variable aléatoire $X + 1$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X + 1)$.
En déduire que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.
- Montrer que la variable aléatoire $(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}((X - 1)(X + 1))$.
En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$.

Partie III

Soit $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement compris entre 0 et 1.

On étudie la durée de vie en années d'un appareil. Tout au long de l'année initiale $k = 0$, on suppose que l'appareil fonctionne. Puis, à l'issue de chaque année numéro k (k étant un entier naturel non nul), l'appareil possède une certaine probabilité de tomber en panne.

Plus précisément, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, si la machine fonctionne encore à l'issue de la $(k - 1)$ ème année, alors elle cesse de fonctionner à la fin de l'année k avec probabilité α_k , et elle continue à fonctionner après la fin de l'année k avec probabilité $1 - \alpha_k$.

On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie en années de l'appareil.

- Justifier que, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = (1 - \alpha_k)R_X(k - 1)$.
- En déduire, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$.
- En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression de $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction des termes de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
On pourra utiliser le résultat de la question 2a.
- Étude de deux exemples.
 - Dans cette question uniquement, on suppose que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante, c'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = p$.
Reconnaître la loi de X .
 - Dans cette question uniquement, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$.
Déterminer la loi de X .

Partie IV - Informatique

9. On considère qu'on dispose d'une fonction python `alpha(k)` qui prend un entier k et renvoie α_k . Compléter le code ci-dessous pour simuler le temps de panne.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def alpha(k):
    return ... #On considère que l'utilisateur a complété cela

def simul_X():
    k = 1
    while .....:
        k = k + 1
    return k
```

10. Ecrire un code utilisant `simul_X()`, appelé `esperance_X(n)`, qui simule n fois une réalisation de X et qui calcule une approximation de l'espérance de X (si elle existe)
11. Dans cette question, on considère que `alpha` est défini ainsi :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def alpha(k):
    return p
```

Quelle valeur, approximativement, devrait afficher `esperance_X(10000)` ?

Exercice 3 Ecririme Math appli 2024

Partie I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

1. Étude du cas $n = 3$.

Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Pourriez vous donner une propriété visuelle de M ? *On ne demande aucun calcul, juste une phrase de quelques mots.*
- (b) Calculer $(M + I)^2$, puis en déduire un polynôme annulateur de M qu'on appellera P .
- (c) Déterminer $\alpha_1 < \alpha_2$ les deux racines de P . Ensuite, déterminer E_{α_1} et E_{α_2} , où, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $E_\lambda = \left\{ X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : MX = \lambda X \right\}$.

Dans les questions qui suivent, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (d) Montrer que P est inversible et que :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1}MP$.

- (e) Déterminer les coefficients de la matrice D .
- (f) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k , $M^k = PD^kP^{-1}$.
- (g) Soit k un entier naturel. On admet qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_kM + b_kI_3$.
En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer a_k et b_k .

2. Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$.
- (b) Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n .
- (c) En déduire, pour tout entier naturel k non nul :

$$(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n,$$

où :

$$c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.$$

- (d) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n},$$

où c_k est le réel défini à la question précédente.

- (e) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de n et de k .

Exercice 2 Ecricone math appliquée 2023

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

On rappelle que $2 < e < 3$.

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$

- (b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
(d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0, +\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n , avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n.$$

2. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
(b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge.

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

- (c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.
(d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. (a) Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε .
On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.
— On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
— Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leq n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$.
Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
— On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier n supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif **eps**, et renvoyant une valeur approchée de u_n à **eps** près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np

def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while -----:
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            -----
        else:
            -----
    return (a+b)/2
```

- (b) Écrire une fonction en langage Python, nommée **sp**, prenant en entrée un entier N supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif **eps** et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum_{n=2}^N u_n$ à **eps** près.

On pourra faire appel à la fonction **approx_u** définie à la question précédente.