

Corrigé : Somme et produit télescopique

1. On souhaite calculer

$$S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right).$$

On sépare la somme en deux :

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}.$$

Dans la première somme, on effectue le changement d'indice $i = k + 2$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i}.$$

De même, dans la seconde somme, on pose $j = k + 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}.$$

Ainsi,

$$S = \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = \boxed{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}}.$$

2. On veut calculer

$$P = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{3k}.$$

On met en facteur le terme $1/3$:

$$P = \frac{1}{3^n} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{(n+1)!}{3^n n!}.$$

Donc

$$\boxed{P = \frac{n+1}{3^n}}.$$

3. On reconnaît le développement du binôme :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k = (1-2)^n = (-1)^n.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n}.$$

4. En retirant le terme $k = 0$ (qui vaut 1) :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^k + 1 - 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k - 1$$

Grâce à la question précédente :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n - 1}.$$

5. Par le binôme de Newton :

$$(x+3)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^{2n+1-k} 3^k.$$

6. Pour $n \geq 2$, on connaît la somme géométrique

$$\sum_{k=2}^n 2^k = 4 \frac{(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 4.$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^n 2^k = 2^{n+1} - 4}.$$

Corrigé : Étude de matrice – Ecricome 2024

On considère

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculons $(M + I)^2$:

$$M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$(M + I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3(M + I).$$

On a donc :

$$(M + I)^2 - 3(M + I) = 0.$$

En développant :

$$M^2 + 2M + I - 3M - 3I = 0 \iff M^2 - M - 2I = 0.$$

$$\boxed{M^2 - M - 2I = 0}$$

est un polynôme annulateur de M .

(a.ii) On en déduit que $M \left(\frac{1}{2}(M - I) \right) = I$, donc M est inversible d'inverse $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)$.

(b) On considère

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Donc P est inversible, d'inverse :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) On pose $D = P^{-1}MP$. Commençons par calculer $P^{-1}M$.

$$P^{-1}M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

En multipliant le tout à droite par P , on obtient :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) On en déduit que

$$D = P^{-1}MP \iff PD = PP^{-1}DP \iff PDP^{-1} = I_3DPP^{-1} \iff PDP^{-1} = M.$$

Donc, $M = PDP^{-1}$. Pour tout entier naturel k , notons

$$P(k) : M^k = PD^kP^{-1}.$$

— *Initialisation* C'est vrai pour $k = 0$, c'est vrai ($M^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$)

— *Hérédité* Soit $k \geq 0$ tel que $P(k)$. On a :

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k M = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) \quad \text{Par } P(k) \text{ et ce qui a été fait en début de question} \\ &= PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc, $P(k+1)$ est vraie.

— Conclusion Donc la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(e) En calculant, il vient :

$$PD = \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^k & 2^k \\ (-1)^{k+1} & 0 & 2^k \\ 0 & (-1)^{k+1} & 2^k \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$PDP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^k & 2^k \\ (-1)^{k+1} & 0 & 2^k \\ 0 & (-1)^{k+1} & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2^k & 2^k - (-1)^k & c_k \\ d_k & e_k & f_k \\ g_k & h_k & i_k \end{pmatrix},$$

où $c_k, d_k, e_k, f_k, g_k, h_k, i_k$ sont des coefficients qu'on ne cherche pas à calculer.

Par ailleurs,

$$a_k M + b_k I_3 = \begin{pmatrix} b_k & a_k & a_k \\ a_k & b_k & a_k \\ a_k & a_k & b_k \end{pmatrix},$$

Donc en identifiant les coefficients : $a_k = \frac{2^k - (-1)^k}{3}$ et $b_k = \frac{2(-1)^k + 2^k}{3}$.

Étude de la fonction $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $e^x + e^{-x} \neq 0$. Par conséquent, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ existe. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = -f(x).$$

Ainsi, la fonction f est impaire.

3. La fonction f est dérivable comme quotient bien défini de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Ainsi, $f'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que f est strictement croissante.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

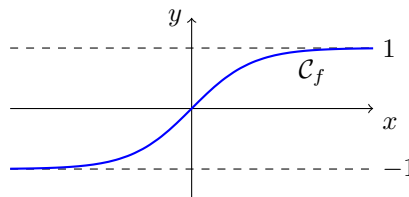
Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Par imparité, on obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

5. On a $f'(0) = 1$. On déduit des questions précédentes l'allure de la courbe représentative de f :



6. Comme on l'a vu, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est par ailleurs continue comme quotient de fonctions continues, donc, d'après le théorème de la bijection, elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

7. Si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = y \iff e^x - e^{-x} = y(e^x + e^{-x}) \iff (1-y)e^x = (1+y)e^{-x} \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

car $y \neq 1$. Ainsi, en composant par $\ln$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que

$$f(x) = y \iff 2x = \ln \frac{1+y}{1-y} \iff x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

Il y a donc une unique solution à l'équation, donnée par $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$.

8. Soit $y \in]-1, 1[$. On sait que f est inversible par la question 6 si l'on restreint son espace d'arrivée à $] -1, 1[$. D'après ce qui précède, on a

$$y = f\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}\right), \quad \text{donc} \quad f^{-1}(y) = f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}\right)\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y},$$

donc on a bien $f^{-1} = g$.

N.B. On pouvait aussi bien sûr redémontrer que $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in]-1, 1[$.

Corrigé : Étude d'une suite

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \sqrt{1+x},$$

et la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. **Recherche du point fixe.** On cherche $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. L'équation s'écrit :

$$\alpha = \sqrt{1+\alpha}.$$

En élevant les deux membres au carré :

$$\alpha^2 = 1 + \alpha \iff \alpha^2 - \alpha - 1 = 0.$$

Le discriminant du polynôme $P : x \rightarrow x^2 - x - 1$ vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, donc

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Comme $\alpha > 0$, on garde

$$\boxed{\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

2. **Encadrement de la suite.** On étudie les variations de f . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : u_n \leq \alpha$

— *Initialisation* : $u_0 = 1 \leq \alpha$.

— *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Par $P(n) : u_n \leq \alpha$. Comme f est croissante, on a $f(u_n) \leq f(\alpha) = \alpha$, donc $u_{n+1} \leq \alpha$.

Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \alpha$.

3. **Monotonie de (u_n) .** Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : u_n \leq u_{n+1}$.

— **Initialisation** On a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(1) = \sqrt{2} > 1$.

— **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. On a donc :

$$\begin{array}{ll} \text{Par } P(n) & u_n \leq u_{n+1} \\ \text{Par croissance de } f & f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \\ \text{Donc,} & u_{n+1} \leq u_{n+2}. \end{array}$$

D'où $P(n+1)$.

— **Conclusion** : la récurrence a abouti. Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4. **Convergence de (u_n) .** La suite (u_n) est : **croissante et majorée par α** . D'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ . En passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, et en utilisant la continuité de f , on obtient :

$$\ell = f(\ell) = \sqrt{1 + \ell}.$$

La limite ℓ est donc un point fixe de f , c'est-à-dire $\ell = \alpha$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Etude d'une suite homographique

1. **a.** L'équation a pour domaine de validité $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Si $x \in D$, on a

$$\frac{6+x}{2+x} = x \iff 6+x = x(2+x) \iff x^2 + x - 6 = 0.$$

Or le polynôme $x^2 + x - 6$ a pour racines 2 et -3 , qui appartiennent bien à D . L'équation a donc pour solutions 2 et -3 .

b. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite est constante, on a $u_{n+1} = u_n$. Autrement dit, on a

$$u_n = \frac{6 + u_n}{2 + u_n}.$$

Par conséquent, u_n est solution de l'équation de la question précédente. Nous savons donc que soit $u_n = 2$, soit $u_n = -3$.

Comme la suite est constante, tous ses termes sont égaux. D'après ce qui précède, soit ils sont tous égaux à 2, soit ils sont tous égaux à -3 .

2. Nous allons raisonner par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \neq 2$ ".

Initialisation. Comme on a supposé $u_0 \neq 2$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{P}(n+1)$ est fausse, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2$. On a alors

$$\frac{6 + u_n}{2 + u_n} = 2, \text{ c'est-à-dire } 6 + u_n = 2(2 + u_n), \text{ donc } u_n = 2.$$

Il y a contradiction avec $\mathcal{P}(n)$, donc on a bien montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 3}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{6+u_n}{2+u_n} + 3}{\frac{6+u_n}{2+u_n} - 2} = \frac{6 + u_n + 3(2 + u_n)}{6 + u_n - 2(2 + u_n)} = \frac{4u_n + 12}{-u_n + 2} = -4 \frac{u_n + 3}{u_n - 2} = -4v_n.$$

On a finalement bien montré que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -4 .

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n = (-4)^n v_0 = (-4)^n \frac{u_0 + 3}{u_0 - 2}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n(u_n - 2) = u_n + 3$, on déduit que $u_n(v_n - 1) = 2v_n + 3$. On remarque que $v_n - 1 \neq 0$: sinon on aurait $u_n + 3 = u_n - 2$, ce qui est impossible. Finalement,

$$u_n = \frac{2v_n + 3}{v_n - 1} = \frac{2(-4)^n \frac{u_0+3}{u_0-2} + 3}{(-4)^n \frac{u_0+3}{u_0-2} - 1} = \frac{2(-4)^n(u_0 + 3) + 3(u_0 - 2)}{(-4)^n(u_0 + 3) - (u_0 - 2)}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en divisant le numérateur et le dénominateur par $(-4)^n$ dans la fraction précédente que

$$u_n = \frac{2(u_0 + 3) + \frac{3}{(-4)^n}(u_0 - 2)}{u_0 + 3 - \frac{1}{(-4)^n}(u_0 - 2)}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} |(-4)^n| = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(-4)^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{(-4)^n} = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2(u_0 + 3)}{u_0 + 3} = 2.}$$