

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

" Peut-être que je pourrais mieux décrire mon expérience de faire des mathématiques en termes d'entrée dans un manoir sombre. Vous entrez dans la première pièce et il fait sombre, complètement sombre. Vous trébuchez et vous heurtez aux meubles. Petit à petit, vous apprenez où se trouve chaque meuble. Et finalement, après environ six mois, vous trouvez l'interrupteur et l'allumez. Soudain, tout est illuminé et vous pouvez voir exactement où vous étiez. Ensuite, vous entrez dans la prochaine pièce sombre. . . "

ANDREW WILES

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

1 Somme et produit télescopique

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

1. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}$
2. Calculer

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{3k}$$

3. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} (-2)^k$.
4. En déduire $\sum_{k=1}^n \binom{k}{n} (-2)^k$.
5. Développer $(x+3)^{2n+1}$
6. On suppose $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^n 2^k$.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx.$$

1. Calculer u_1 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{x}{x+n}.$$

Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0, 1]$.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

- (b) En déduire que $\sum_{k=1}^n u_k$ converge. On note :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

- (a) Justifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq \gamma.$$

- (b) Déterminer les deux réels a, b tels que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}.$$

- (c) Établir alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = \frac{1}{k} [-\ln(k+1) + \ln(k)].$$

- (d) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} [-\ln(k+1) + \ln(n+1)].$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

- (a) Justifier que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.
(b) Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leq (n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n .