

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$x - 1 \leq \sqrt{|x + 1|}.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\lfloor x^2 \rfloor = n$$

d'inconnue x .

Exercice 3. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + mz &= m^2 \\ x + my + z &= m \\ mx + y + z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 4. On considère un réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = \cos(x) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}} \end{cases}$$

On pose également : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = \prod_{k=1}^n u_k$.

- 1) (a) Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \frac{1 + \cos(\theta)}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
- 2) Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{x}{8}\right)$.
- 3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n P_n}$.
- 4) En déduire P_n pour tout entier naturel $n \geq 1$.
- 5) En prenant le logarithme népérien de la relation trouvée à la question précédente, puis en dérivant par rapport à x , montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2^k} = \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{x}{2^n}\right) \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Exercice 5. Les deux premières questions sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels.

1. (a) Montrer : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
(b) On pose $A = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ et $B = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$. Montrer que si les $x_1, \dots, x_n$ sont non tous nuls et les $y_1, \dots, y_n$ sont non tous nuls alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i y_i \leq \frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} x_i^2 + \frac{A}{B} y_i^2 \right).$$

- (c) En déduire :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

2. (a) Montrer que si les $y_1, \dots, y_n$ sont non tous nuls alors la fonction

$$t \longmapsto \sum_{i=1}^n (x_i + t y_i)^2$$

est un polynôme de degré 2 dont on déterminera les coefficients.

(b) Montrer alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz, version 1})$$

et

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz, version 2}).$$

3. Trois applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(a) Montrer :

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

(b) Montrer :

$$\sum_{k=1}^n k^2 \leq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}.$$

(c) Montrer :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (\text{inégalité de Minkowski}).$$

EDHEC 2020

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$$

- 1) (a) Ecrire une fonction Python `Suite(n)` qui renvoie u_n pour une valeur de n saisie par l'utilisateur :
(b) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

(c) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

- 2) Dans cette question, x désigne un réel appartenant à $[0, 1[$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, x]$, simplifier la somme :

$$\sum_{p=1}^n t^{p-1}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_x^1 \frac{t^n}{1-t} dt.$$

(c) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_x^1 \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$$

(d) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).$$