

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

" Peut-être que je pourrais mieux décrire mon expérience de faire des mathématiques en termes d'entrée dans un manoir sombre. Vous entrez dans la première pièce et il fait sombre, complètement sombre. Vous trébuchez et vous heurtez aux meubles. Petit à petit, vous apprenez où se trouve chaque meuble. Et finalement, après environ six mois, vous trouvez l'interrupteur et l'allumez. Soudain, tout est illuminé et vous pouvez voir exactement où vous étiez. Ensuite, vous entrez dans la prochaine pièce sombre. . . "

ANDREW WILES

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

Exercice 1. (4 points)

— Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto x^4$ 4) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f : x \mapsto \sin(x) \cos(x)$

2) $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$ 5) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ 7) $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$

3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Corrigé exercice 1

Exercice 2. (8 points)

0.a) Quelle est une primitive de $\frac{u'}{u}$?

0.b) Quelle est une primitive de $u' e^u$?

0.c) Quelle est une primitive de $u' u^\alpha$?

Applications : déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto x e^{x^2}$ 2) $f : x \mapsto (1-x)^n, n \in \mathbb{N}$ 3) $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$

Corrigé exercice 2

Exercice 3 : Changement de variables (5 points)

1) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$
Poser $u = e^x$; utiliser que $\frac{u}{u+1} = c - \frac{1}{u+1}$ (trouver c)

2) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^t} dt$
Poser $u = e^t$; utiliser que $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$ (trouver a, b)

Corrigé exercice 3

Limites (6 points)

1. Soit

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x^4 + x}}.$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$.

2. Soit

$$f_2(x) = \frac{x^3}{e^x}.$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$.

3. Soit

$$f_3(x) = \sqrt{x^2 + x} - x.$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x)$.

4. Soit

$$f_4(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_4(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x)$.

5. Soit

$$f_5(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1.$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_5(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x)$.

6. Soit

$$f_6(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1).$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_6(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x)$.

Corrigé exercice 4

Exercice 5 (15 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx.$$

1. Calculer u_1 .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{x}{x+n}.$$

Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0, 1]$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

On admet que la suite la convergence $Q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge en $+\infty$ vers $\pi^2/6$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

4.a Démontrer que S_n est croissante et majorée par $\pi^2/6$.

4.b. En déduire que S_n converge. On notera γ sa limite en $+\infty$.

4.c. Déterminer les deux réels a, b tels que

$$\forall x \in [0, 1], \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}.$$

4.d. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \frac{1}{k} \ln(k).$$

4.e. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

5.a. Justifier que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

5.b. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n .

Corrigé exercice 5

Corrigé exercice 1

1. $F : x \rightarrow x^4$

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

Rappel : pour tout $n \neq -1$, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

2. $F : x \rightarrow \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, avec $n \in \mathbb{N}$

$$\int x^{-n} dx = \begin{cases} \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C & \text{si } n \neq 1, \\ \ln|x| + C & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Cas particulier : $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

3. $F : x \rightarrow \sqrt{x} = x^{1/2}$

$$\int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C.$$

4. $F : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$

$$\int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

5. $F : x \rightarrow x\sqrt{x} = x^{3/2}$

$$\int x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{2}{5} x^{5/2} + C.$$

6. $F : x \rightarrow \sin(x) \cos(x)$

On remarque que $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$. Donc $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$.

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) + C.$$

7. $F : x \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k x^k$

$$\int f(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

On intègre chaque terme séparément : c'est la linéarité de l'intégrale.

Corrigé exercice 2

Corrigé Exercice 2

- 0.a) Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u| + C$.
0.b) Une primitive de $u'e^u$ est $e^u + C$.
0.c) Une primitive de $u'u^\alpha$ (avec $\alpha \neq -1$) est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

1) $F : x \rightarrow xe^{x^2}$

On reconnaît la forme $u'e^u$ avec $u = x^2$ et $u' = 2x$. Ainsi,

$$xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'e^u.$$

Par la question 0.b), une primitive est :

$$F : x \rightarrow \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

2) $F : x \rightarrow (1-x)^n$

Ici $u = 1-x$, donc $u' = -1$. Ainsi $F : x \rightarrow -u'u^n$, et d'après la question 0.c) :

$$F : x \rightarrow -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + C.$$

3) $F : x \rightarrow \frac{1}{x \ln^\alpha x}$

3) $F : x \rightarrow \frac{1}{x \ln^\alpha x}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Domaine de définition. La fonction $\ln x$ n'est définie que pour $x > 0$. De plus, $\ln x = 0$ pour $x = 1$, ce qui pose un problème si $\alpha \neq 0$. On travaille donc sur un intervalle $I \subset]0, 1[$ ou $I \subset]1, +\infty[$.

On reconnaît la forme

$$\frac{u'}{u^\alpha} \quad \text{avec} \quad u = \ln x \quad \text{et} \quad u' = \frac{1}{x}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x \ln^\alpha x} = u' u^{-\alpha}.$$

Cas 1 : $\alpha \neq 1$.

On applique la question 0.c) avec l'exposant $-\alpha \neq -1$, ce qui donne :

$$\int \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \int u' u^{-\alpha} du = \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C.$$

En revenant à la variable x , on obtient :

$$F : x \rightarrow \frac{(\ln x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C.$$

Cas 2 : $\alpha = 1$.

Dans ce cas,

$$F(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{u'}{u}.$$

D'après la question 0.a), une primitive est :

$$F : x \rightarrow \ln|\ln x| + C.$$

Conclusion. Les primitives de $\frac{1}{x \ln^\alpha x}$ sont donc définies sur tout intervalle inclus dans $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$, et dépendent de la valeur de α .

Corrigé exercice 3

1. $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$

On pose $u = e^x$, donc $du = e^x dx$, d'où $dx = \frac{du}{u}$.

x	$u = e^x$
0	1
1	e

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int_1^e \frac{u^2}{u + 1} \cdot \frac{du}{u} = \int_1^e \frac{u}{u + 1} du.$$

On décompose :

$$\frac{u}{u + 1} = 1 - \frac{1}{u + 1}.$$

Alors :

$$\int_1^e \frac{u}{u + 1} du = [u - \ln(u + 1)]_1^e = e - 1 - \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right).$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = e - 1 - \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)}.$$

2. $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^t} dt$

On pose $u = e^t$, donc $du = e^t dt$ et $dt = \frac{du}{u}$.

t	$u = e^t$
0	1
$\ln 2$	2

Alors :

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^t} dt = \int_1^2 \frac{1}{1 + u} \cdot \frac{du}{u} = \int_1^2 \frac{du}{u(u + 1)}.$$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{u(u + 1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1}.$$

Donc :

$$\int_1^2 \frac{du}{u(u + 1)} = [\ln(u) - \ln(u + 1)]_1^2 = 2 \ln 2 - \ln 3.$$

$$\boxed{\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^t} dt = 2 \ln 2 - \ln 3}.$$

Corrigé exercice 4

1) Soit $f_1(x) = \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x^4 + x}}$.

(a) Limite en 0.

Lorsque $x \rightarrow 0$, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 0. On factorise :

$$f_1(x) = \frac{x(x + 3)}{\sqrt{x(x^3 + 1)}} = \frac{x + 3}{\sqrt{x^3 + 1}} \sqrt{x}.$$

Le premier terme tend vers 3, et le second vers 0. Par produit,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0.$$

(b) Limite en $+\infty$.

On factorise par x^2 au numérateur et sous la racine :

$$f_1(x) = \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1.$$

2) Soit $f_2(x) = \frac{x^3}{e^x}$.

(a) Limite en 0.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, donc par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0.$$

(b) Limite en $+\infty$.

Par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0.$$

3) Soit $f_3(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$.

(a) Limite en 0.

On a $\sqrt{x^2 + x} \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) = 0.$$

(b) Limite en $+\infty$.

Avec la quantité conjuguée :

$$f_3(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}.$$

En factorisant par x :

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \frac{1}{2}.$$

4) Soit $f_4(x) = \frac{\sin x}{x}$.

(a) Limite en 0.

Limite usuelle :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(b) Limite en $+\infty$.

$|f_4(x)| \leq \frac{1}{|x|}$ qui tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. Par théorème de comparaison,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = 0.$$

5) Soit $f_5(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1$.

(a) Limite en 0.

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_5(x) = +\infty.$$

(b) Limite en $+\infty$.

On rationalise :

$$f_5(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = 0.$$

6) Soit $f_6(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x - \ln(x+1)$.

(a) Limite en 0.

On a $\ln x \rightarrow -\infty$ et les autres termes sont bornés, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_6(x) = -\infty.$$

(b) Limite en $+\infty$.

On écrit :

$$\ln x - \ln(x+1) = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right).$$

Ainsi,

$$f_6(x) = \frac{1}{x+1} + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right).$$

Par la continuité de $\ln$ en 1, le second terme tend vers $\ln(1) = 0$. Par somme de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = 0.$$

Corrigé exercice 5

Voir le corrigé du concours blanc, niveau 1