

Devoir de calcul : EM Lyon 2007

On considère l'application

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I : Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. On considère l'application

$$A : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

- a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}.$$

- b) On admet que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ et préciser $f'(0)$.
- c) Dresser le tableau de variation de A .
En déduire que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
- d) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application

$$B : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

- a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

- b) Dresser le tableau de variation de B .
En déduire que f est convexe sur $[0; +\infty[$.

4. Tracer la courbe représentative de f .

Partie II : Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0; 1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où l'on a noté :

$$J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt.$$

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

4. En déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$, la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$$

existe et que :

$$\ln(1+x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III : Égalité d'une intégrale et d'une somme de termes

1. Montrer, en utilisant le résultat de II.3, que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

existe et que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Indice : pour montrer l'existence de la limite, deux méthodes. On pourra comparer $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt$ et $\frac{1}{n^2}$. On pourra aussi procéder en utilisant le théorème des suites adjacentes

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}, \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}. \end{cases}$$

4. On admet que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Montrer alors que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

1 Corrigé

1. On reconnaît la formule de la dérivée lorsque l'on calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{1+0} = 1 = f(0)$.
Donc,

$$f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.$$

2. (a) $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ comme fonction rationnelle.
 $x \mapsto x + 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$; $\forall x \in]0, +\infty[, 1 + x \in \mathbb{R}^*$; $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 Alors, par composition, $x \mapsto \ln(1 + x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
 Ainsi par produit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1+x} x - \ln(1+x) \right) = \frac{A(x)}{x^2}.$$

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right) = \frac{A(x)}{x^2}.$$

- (b) **Version 1** Avec le théorème de la "limite de la dérivée".

- f est continue sur $[0, +\infty[$;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$;
- f' admet une limite finie à droite en 0 qui vaut $-\frac{1}{2}$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Version 2 : avec le théorème du cours sur le prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\text{Posons } \forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Tout ce qui précède montre que :

- g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$;
- g' admet une limite finie à droite en 0.

Alors g se prolonge en une fonction $\hat{g}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Notons que f et $\hat{g}$ coïncident sur $]0, +\infty[$.

Or $\hat{g}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \hat{g}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. f et $\hat{g}$ coïncident en 0.

Finalement $f = \hat{g}$ et ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

En particulier $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[\text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

- (c) $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont dérivables sur $[0, +\infty[$ donc A est dérivable sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad A'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

A est continue sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[, A'(x) < 0$ donc A est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Notons encore que $A(0) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right) = -\infty$.

$$A \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[, A(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = -\infty.$$

A étant strictement décroissante sur $[0, +\infty[, \forall x \in]0, +\infty[, A(x) < A(0) = 0$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} < 0$. f étant continue sur $[0, +\infty[$ on peut alors dire que :

$$f \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[.$$

(d) $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Alors :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

3. a. Rappelons que : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$.

Rappelons également que : A est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[, A'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}$.

Ainsi A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{A(x)}{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Ce qui suffit pour dire que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

De plus : $\forall x \in]0, +\infty[,$

$$f''(x) = \frac{1}{x^4} (A'(x)x^2 - A(x)(2x)) = \frac{1}{x^3} \left(-\frac{x}{(1+x)^2}x - 2 \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right) \right).$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = \frac{1}{x^3} \left(-\frac{x^2 + 2x(1+x)}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x) \right) = \frac{1}{x^3} \left(-\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x) \right).$$

$$\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = \frac{1}{x^3} \left(-\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x) \right) = \frac{B(x)}{x^3}.}$$

b. $x \mapsto -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto 2\ln(1+x)$ sont dérivables sur $[0, +\infty[$ donc B est dérivable sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, B'(x) = \frac{(6x+2)(1+x)^2 - (3x^2+2x)2(1+x)}{(1+x)^4} + \frac{2}{1+x}.$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, B'(x) = \frac{2(3x+1)(1+x) - 2(3x^2+2x)}{(1+x)^3} + \frac{2}{1+x}.$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, B'(x) = 2 \frac{-(3x^2+4x+1) + (3x^2+2x) + (1+x)^2}{(1+x)^3} = \frac{2x^2}{(1+x)^3}.$$

Alors $\forall x \in [0, +\infty[, B'(x) \geq 0$. B est croissante sur $[0, +\infty[$. Notons que $B(0) = 0$.

Notons encore que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(3x^2+2x)}{(1+x)^2} = -3$ (classique : factoriser par x^2 au numérateur et au dénominateur).

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$, on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x) \right) = +\infty.$$

$$\boxed{B \text{ est croissante sur } [0, +\infty[, B(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = +\infty.}$$

$B(0) = 0$ et B est croissante sur $[0, +\infty[$ donc $\forall x \in [0, +\infty[, B(x) \geq 0$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = \frac{B(x)}{x^3} \geq 0$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est convexe sur }]0, +\infty[.}$$

3. RAS!! Il convient simplement de se rappeler que :

— $f(0) = 1$.

- f est (strictement) décroissante sur $[0, +\infty[$.
- La demi-tangente au point d'abscisse 0 est portée par la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
- La courbe représentative de f est au-dessus de sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Partie II — Un développement en série.

1. Soit N dans $\mathbb{N}$ et soit t un réel de l'intervalle $[0, 1[$. Par la formule des sommes géométriques :

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^N (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1 - (-t)} = \frac{1 - (-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t} \quad \text{car } -t \text{ n'est pas égal à } 1.$$

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k t^k = \frac{1 - (-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1 + t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t}.$$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{1 + t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t}.$$

2. Soit N dans $\mathbb{N}$ et soit x un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

$$\forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{1 + t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t}.$$

En intégrant et en utilisant la linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^x \frac{1}{1 + t} dt = \sum_{k=0}^N (-1)^k \int_0^x t^k dt + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t} dt.$$

Or $\int_0^x \frac{1}{1 + t} dt = [\ln(1 + t)]_0^x = \ln(1 + x)$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^x t^k dt = \frac{x^{k+1}}{k + 1}$.

Alors $\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k + 1} + (-1)^{N+1} \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1 + t} dt.$

$$\boxed{\text{Si } N \in \mathbb{N} \text{ et si } x \in [0, 1], \quad \ln(1 + x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k + 1} + J_N(x) \text{ où } J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t} dt.}$$

3. Soit N dans $\mathbb{N}$ et soit x un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

Comme $0 \leq t \leq x$,

$$|J_N(x)| = \left| \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t} dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t} \right| dt = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1 + t} dt.$$

Or $\forall t \in [0, x], \frac{1}{1 + t} \leq 1$ et $t^{N+1} \geq 0$ donc $\forall t \in [0, x], \frac{t^{N+1}}{1 + t} \leq t^{N+1}$.

Alors

$$|J_N(x)| \leq \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1 + t} dt \leq \int_0^x t^{N+1} dt = \frac{x^{N+2}}{N + 2}.$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \forall N \in \mathbb{N}, \quad |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N + 2}.$$

4. Soit x un élément de $[0, 1]$.

$$\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N + 2} \text{ et comme } \frac{1}{N + 2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } x^{N+2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

par encadrement on obtient alors : $\lim_{N \rightarrow +\infty} J_N(x) = 0$.

Or $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) - J_N(x)$. Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$. Par changement de variable, on obtient que la série de terme général $(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ converge et que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$.

Partie III — Égalité d'une intégrale et d'une somme de série.

1. Soit N un élément de $\mathbb{N}$ et x un réel de l'intervalle $]0, 1]$.

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| = |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

Ce qui donne :

$$\left| x f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

Alors :

$$x \left| f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right| = \left| x f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

En divisant par x qui est strictement positif, on obtient :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

Notons que $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^k}{k+1}$ et $x \mapsto \frac{x^{N+1}}{N+2}$ prennent la valeur 0 en 0, donc l'inégalité précédente vaut encore pour $x = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \forall N \in \mathbb{N}, \left| f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Soit N un élément de $\mathbb{N}$.

$$\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right) dx = \int_0^1 f(x) dx - \sum_{k=0}^N (-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{k+1} dx = \int_0^1 f(x) dx - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

$$\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right) dx = \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx.$$

Alors :

$$\left| \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx \right| \leq \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right| dx.$$

Donc :

$$0 \leq \left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| \leq \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2} dx = \frac{1}{(N+2)^2}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(N+2)^2} = 0.$$

Alors, par encadrement, on obtient :

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \int_0^1 f(x) dx.}$$

3. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{1 \leq 2p+1 \leq 2N+1} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{1 \leq 2p \leq 2N+1} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{1 \leq 2p+1 \leq 2N+1} \frac{(-1)^{2p}}{(2p+1)^2} + \sum_{1 \leq 2p \leq 2N+1} \frac{(-1)^{2p-1}}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}.$$

Pour tout élément N de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}.$
--

Pour tout élément N de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}.$

4. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. En soustrayant les deux égalités de Q3, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 2 \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \frac{1}{p^2}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Alors :

$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2}{12}.$
--