

Exercice 1. (4 points)

— Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto x^4$ 4) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f : x \mapsto \sin(x) \cos(x)$

2) $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$ 5) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ 7) $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$

3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$
Corrigé exercice 1

Exercice 2. (6 points)

0.a) Quelle est une primitive de $\frac{u'}{u}$?

0.b) Quelle est une primitive de $u'e^u$?

0.c) Quelle est une primitive de $u'u^\alpha$?

Applications : déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto xe^{x^2}$ 2) $f : x \mapsto (1-x)^n, n \in \mathbb{N}$ 3) $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}$

Corrigé exercice 2

Exercice 3 : Changement de variables (5 points)

1) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$
Poser $u = e^x$; utiliser que $\frac{u}{u+1} = c - \frac{1}{u+1}$ (trouver c)

2) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^t} dt$
Poser $u = e^t$; utiliser que $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$ (trouver a, b)

Corrigé exercice 3

Limites (6 points)

1. Soit

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x^4 + x}}.$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$.

2. Soit

$$f_2(x) = \frac{x^3}{e^x}.$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$.

3. Soit

$$f_3(x) = \sqrt{x^2 + x} - x.$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x)$.

4. Soit

$$f_4(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_4(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x)$.

5. Soit

$$f_5(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1.$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_5(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x)$.

6. Soit

$$f_6(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1).$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_6(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x)$.

Exercice 5 (15 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx.$$

1. Calculer u_1 .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{x}{x+n}.$$

Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0, 1]$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

On admet que la suite la convergence $Q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge en $+\infty$ vers $\pi^2/6$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

4.a Démontrer que S_n est croissante et majorée par $\pi^2/6$.

4.b. En déduire que S_n converge. On notera γ sa limite en $+\infty$.

4.c. Déterminer les deux réels a, b tels que

$$\forall x \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}.$$

4.d. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \frac{1}{k} \ln(k).$$

4.e. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

5.a. Justifier que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

5.b. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n .