

Devoir de calcul : EM Lyon 2007 ECS, Problème 1

On considère l'application

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I : Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. On considère l'application

$$A : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

- a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}.$$

- b) On admet que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ et préciser $f'(0)$.
- c) Dresser le tableau de variation de A .
En déduire que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
- d) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application

$$B : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

- a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

- b) Dresser le tableau de variation de B .
En déduire que f est convexe sur $[0; +\infty[$.

4. Tracer la courbe représentative de f .

Partie II : Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0; 1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où l'on a noté :

$$J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt.$$

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

4. En déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$, la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$$

existe et que :

$$\ln(1+x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III : Égalité d'une intégrale et d'une somme de termes

1. Montrer, en utilisant le résultat de II.3, que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

existe et que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Indice : pour montrer l'existence de la limite, deux méthodes. On pourra comparer $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt$ et $\frac{1}{n^2}$. On pourra aussi procéder en utilisant le théorème des suites adjacentes

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}, \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}. \end{cases}$$

4. On admet que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Montrer alors que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2}{12}.$$