

DS de calcul – ECG1

Exercice 0. (4 points)

— Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

- 1) $f : x \mapsto x^4$ 4) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f : x \mapsto \sin(x) \cos(x)$
2) $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ 5) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ 7) $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$
3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Exercice 1 (6 points) — Dérivées

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes. Préciser les ensembles de dérivabilités.

$$\begin{aligned} (a) \ f(x) &= x^3 \ln x & (b) \ g(x) &= \frac{e^{2x}}{1+e^x} & (c) \ h(x) &= \sqrt{1+x^2} \\ (d) \ u(x) &= \frac{\ln(1+x)}{x} & (e) \ v(x) &= \arctan(1/x) & (f) \ w(x) &= (1-x^2)^5 \end{aligned}$$

[Corrigé exercice 1](#)

Exercice 2 (8 points) — Étude d'une fonction (dérivation, convexité)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln x - \ln(1+x).$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
3. Calculer $f''(x)$, étudier sa convexité et préciser l'existence éventuelle d'un point d'inflexion.

[Corrigé exercice 2](#)

Exercice 3 (6 points) — Approximation et fonction

1. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$
2. En étudiant la fonction $f(x) = \sin(x) - x + x^3$, démontrer que :

$$\forall x \geq 0, |\sin(x) - x| \leq x^3.$$

[Corrigé exercice 3](#)

Exercice 4 (7 points) — Suites : négligeabilité et équivalents

1. Montrer que $\ln(n+1) - \ln n \sim \frac{1}{n}$ quand $n \rightarrow +\infty$.
2. On pose $a_n = n \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right)$.

- (a) À l'aide d'une application de la formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$, déterminer un équivalent de a_n quand $n \rightarrow +\infty$.
- (b) En déduire la limite de $n a_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. On pose $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- (a) Montrer que $\ln(b_n) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + a_n$.
- (b) En déduire que $b_n \rightarrow e$ et déterminer un équivalent de $e - b_n$ quand $n \rightarrow +\infty$.
4. Montrer que $\ln n = o(\sqrt{n})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

[Corrigé exercice 4](#)

Corrigé exercice 0

Ci-dessous, C est une constante réelle quelconque.

1. $F : x \rightarrow \frac{x^5}{5} + C$
2. $F : x \rightarrow \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ si $n \neq 1$, $F : x \rightarrow \ln(x) + C$ sinon.
3. $F : x \rightarrow \frac{2}{3}x^{3/2}$
4. $F : x \rightarrow 2\sqrt{x}$
5. $F : x \rightarrow \frac{2}{5}x^{5/2}$
6. $F : x \rightarrow \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$
7. $F : x \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^k}{k+1} + C$

Corrigé exercice 1

1.
 - (a) $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$ ($x > 0$)
 - (b) $g'(x) = \frac{2e^{2x}(1+e^x) - e^{2x}e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{2x}(2+e^x)}{(1+e^x)^2}$
 - (c) $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 - (d) $u'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$ ($x \neq 0$)
 - (e) $v'(x) = \frac{-1}{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$
 - (f) $w'(x) = 5(1-x^2)^4 \cdot (-2x) = -10x(1-x^2)^4$

Corrigé exercice 2

1. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $x \ln x \rightarrow 0$ par croissance comparée et $\ln(1+x) \rightarrow \ln(1) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $x \ln x - \ln(1+x) = x \left(\ln(x) - \frac{\ln(1+x)}{x} \right)$. Le premier membre de ce produit tend vers l'infini, et le second aussi comme somme d'une fonction tendant vers l'infini et d'une fonction tendant vers 0 par croissance comparée. Par produit de limites, $f(x) \rightarrow +\infty$.
2. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (somme et compositions de fonctions usuelles).

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{1+x}.$$

3. f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ (somme et compositions de fonctions usuelles).

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x)^2} > 0 \quad (x > 0),$$

donc f est strictement convexe sur $]0, +\infty[$ et n'admet pas de point d'inflexion.

Corrigé exercice 3

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$.

Considérons la fonction $\varphi(x) = x - \sin x$ sur $[0, +\infty[$. Elle est dérivable comme différence de fonctions usuelles, et, pour $x \geq 0$,

$$\varphi'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad (\text{car } \cos x \leq 1).$$

Ainsi φ est croissante sur $[0, +\infty[$. Or $\varphi(0) = 0$, donc pour tout $x \geq 0$,

$$\varphi(x) \geq \varphi(0) \iff x - \sin x \geq 0 \iff \sin x \leq x.$$

2. **En étudiant** $f(x) = \sin x - x + x^3$, **montrer que** $\forall x \geq 0, |\sin x - x| \leq x^3$.

On considère f sur $[0, +\infty[$:

$$f(x) = \sin x - x + x^3.$$

Elle est deux fois dérivable et

$$f'(x) = \cos x - 1 + 3x^2, \quad f''(x) = -\sin x + 6x.$$

D'après la question 1, pour tout $x \geq 0$, on a $\sin x \leq x$. Ainsi, pour tout $x \geq 0$,

$$f''(x) = -\sin x + 6x \geq -x + 6x = 5x \geq 0.$$

Donc $f''(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$, ce qui montre que f' est croissante sur $[0, +\infty[$. Or

$$f'(0) = \cos 0 - 1 + 0 = 0.$$

Comme f' est croissante et $f'(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) \geq 0.$$

Ainsi f est croissante sur $[0, +\infty[$. De plus $f(0) = 0$, donc

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq 0 \iff \sin x - x + x^3 \geq 0 \iff x - \sin x \leq x^3.$$

En combinant avec la question 1 (qui donne $x - \sin x \geq 0$), on obtient, pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq x - \sin x \leq x^3 \iff |\sin x - x| = x - \sin x \leq x^3.$$

Corrigé exercice 4

1. On a

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Par équivalent usuel, on obtient

$$\ln(n+1) - \ln n \sim \frac{1}{n}.$$

2. On pose $a_n = n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$.

(a) Par le cours,

$$\ln(1 + 1/n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$$

Donc,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et en multipliant par n :

$$a_n = n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$a_n \sim -\frac{1}{2n}.$$

(b) Comme $a_n \sim -\frac{1}{2n}$, on a $na_n \sim -\frac{1}{2}$. Donc,

$$na_n \longrightarrow -\frac{1}{2}.$$

3. On pose $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(a) **Montrer que** $\ln(b_n) = 1 + a_n$.

Par définition,

$$\ln(b_n) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) = 1 + a_n.$$

(b) **Limite de b_n et équivalent de $e - b_n$.**

On a $\ln(b_n) = 1 + a_n$ et $a_n \rightarrow 0$, donc $\ln(b_n) \rightarrow 1$ et par continuité de l'exponentielle

$$b_n \rightarrow e.$$

Pour l'équivalent, on écrit

$$b_n = e^{\ln(b_n)} = e^{1+a_n} = e e^{a_n}.$$

Comme $a_n \rightarrow 0$, on a $e^{a_n} - 1 \sim a_n$. Donc

$$e - b_n = e(1 - e^{a_n}) \sim -e a_n,$$

Or $a_n \sim -\frac{1}{2n}$, donc

$$e - b_n \sim \frac{e}{2n}.$$

4. **Montrer que** $\ln n = o(\sqrt{n})$.

C'est de la croissance comparée. En effet, $\ln(n)/n^\alpha \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et que $\alpha > 0$. Ici, $\alpha = 1/2$.