

EDHEC 2018

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose

$$a_n = \frac{1}{n \ln n}.$$

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

- (b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n .

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer que f est continue sur $] -\infty, 1[$.
3. On admet que f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 1/2$.
- (a) Montrer que f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -\infty, 0[\cup]0, 1[$.
- (b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $] -\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f .
- (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. (a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1 .
- (b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- (c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on a :

$$u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

- (d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général

$$-\frac{1}{n \ln(1 - u_n)}$$

est divergente.

- (e) Conclure, en revenant à la définition de u_n , que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

[Corrigé EDHEC 2018](#)

EDHEC 2025

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]n, +\infty[, \quad f_n(x) = (x - n) \ln(x) - x \ln(x - n).$$

On considère aussi une fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. (a) Dresser le tableau de variations de g , limites comprises.

(b) En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante puis que :

$$\forall k \geq 4, \quad \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}.$$

2. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f'_n(x)$ pour tout réel $x > n$.

(b) Montrer que pour tout réel $t > 0$, $\ln(t) \leq t-1$. En déduire que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

(c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n+1, n+2]$, admet une unique solution, que l'on note x_n .

3. Montrer l'équivalent suivant :

$$x_n \sim_{+\infty} n.$$

4. (a) Justifier que :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}.$$

(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1.$$

5. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = x_n - n - 1.$$

(a) Justifier que :

$$\ln(1 + u_n) \sim_{+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \ln(1 + n + u_n) \sim_{+\infty} \ln(n).$$

(b) Avec la question 4.(a), montrer alors que :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

6. Déterminer la nature des séries de termes généraux u_n et u_n^2 .

[Corrigé EDHEC 2025](#)

Corrigé EDHEC 2018

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$a_n = \frac{1}{n \ln n}.$$

1. (a) Pour $t \geq 2$, la fonction $\varphi(t) = \frac{1}{t \ln t}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$ (car $t \mapsto t \ln t$ est croissante et strictement positive sur cet intervalle). Ainsi, pour tout entier $k \geq 2$ et tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k},$$

d'où, en intégrant sur $[k, k+1]$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

- (b) En sommant l'inégalité précédente pour $k = 2, \dots, n$, on obtient

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

Or

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln t} dt = \left[\ln(\ln t) \right]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Les sommes partielles $\sum_{k=2}^n a_k$ sont donc non bornées : la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ est divergente.

Dans la suite, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. (a) Sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, la fonction f est quotient de fonctions continues, avec dénominateur non nul, donc elle est continue.

Il reste à étudier la continuité en 0. Lorsque $x \rightarrow 0$,

$$\ln(1-x) \sim -x \quad \text{et} \quad 1-x \rightarrow 1,$$

donc

$$(1-x) \ln(1-x) \sim -x \implies f(x) = \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0).$$

Ainsi, f est continue sur $]-\infty, 1[$.

3. (a) Sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, la fonction f est dérivable. Posons $d(x) = (1-x) \ln(1-x)$, alors $f(x) = -x/d(x)$.

On calcule

$$d'(x) = -(\ln(1-x) + 1),$$

et, par dérivation d'un quotient,

$$f'(x) = \frac{-d(x) + x d'(x)}{d(x)^2}.$$

On simplifie le numérateur :

$$-d(x) + x d'(x) = -(1-x) \ln(1-x) + x(-\ln(1-x) - 1) = -\ln(1-x) - x.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$,

$$f'(x) = \frac{-(\ln(1-x) + x)}{(1-x)^2 (\ln(1-x))^2}.$$

(b) On étudie le signe de

$$\psi(x) = \ln(1-x) + x \quad \text{sur }]-\infty, 1[.$$

La fonction ψ est dérivable et

$$\psi'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 = -\frac{x}{1-x}.$$

Donc $\psi'(x) > 0$ si $x < 0$ et $\psi'(x) < 0$ si $0 < x < 1$: ψ est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, 1[$. Comme $\psi(0) = 0$, on en déduit que 0 est un maximum et donc

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad \psi(x) \leq 0,$$

avec égalité seulement en $x = 0$.

Or, pour $x \neq 0$, le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif, donc

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) \geq 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.

(c) **Limites et variations.**

— Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a $1-x \rightarrow +\infty$ et $\ln(1-x) \rightarrow +\infty$, et

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \sim \frac{1}{\ln(1-x)} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$

— Lorsque $x \rightarrow 1^-$, en posant $t = 1-x \rightarrow 0^+$, on a $t \ln t \rightarrow 0^-$, donc

$$(1-x)\ln(1-x) \rightarrow 0^-, \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

— En 0, on a $f(0) = 1$.

En résumé : f est croissante de 0 à 1 sur $]-\infty, 0]$, puis croissante de 1 à $+\infty$ sur $[0, 1[$.

4. (a) **Existence et unicité de u_n .** Sur $[0, 1[$, la fonction f est continue et strictement croissante, avec

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

Donc $f([0, 1[) = [1, +\infty[$ et, d'après le théorème de la bijection, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in [0, 1[$ tel que $f(u_n) = n$.

Pour $n = 1$, l'unicité donne immédiatement $u_1 = 0$.

- (b) **Convergence de (u_n) et limite.** Comme f est strictement croissante sur $[0, 1[$, la suite (u_n) est croissante. En effet, $n > n+1 \iff f(u_{n+1}) > f(u_n) \iff u_{n+1} > u_n$, car $f(u_n) = n$. De plus, $u_n < 1$ pour tout n , donc (u_n) est croissante et majorée : elle converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$.

Comme $f(u_n) = n \rightarrow +\infty$ et que f est continue sur $[0, 1[$, il est impossible d'avoir $\ell < 1$ (sinon $f(u_n) \rightarrow f(\ell) < +\infty$). Ainsi, $\ell = 1$. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

- (c) **Calcul de $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ et encadrement de u_n .** Pour $n \geq 2$, posons

$$x = 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Alors $1-x = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et

$$\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -\ln(n\sqrt{n}) = -\frac{3}{2}\ln n.$$

Donc

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} = \frac{-\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(-\frac{3}{2}\ln n\right)} = \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \frac{2n\sqrt{n}}{3\ln n} = \frac{2}{3\ln n}(n\sqrt{n} - 1).$$

Or

$$\frac{2}{3\ln n}(n\sqrt{n} - 1) \geq n \iff 2\sqrt{n} - \frac{2}{n} \geq 3\ln n,$$

ce qui est vrai à partir d'un certain rang (car $\sqrt{n}$ domine $\ln n$ par croissance comparée). Il existe donc n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \geq n = f(u_n).$$

Comme f est croissante sur $[0, 1[$ et $f(u_n) = n$, on en déduit

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

(d) **Divergence de la série de terme général** $-\frac{1}{n\ln(1-u_n)}$. Pour $n \geq n_0$, l'inégalité précédente donne

$$1 - u_n \geq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Comme $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(1 - u_n) \geq \ln\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -\frac{3}{2}\ln n.$$

Ces logarithmes étant négatifs, on obtient (la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et le passage à l'inverse étant strictement décroissant),

$$-\frac{1}{\ln(1 - u_n)} \geq \frac{2}{3\ln n},$$

puis

$$-\frac{1}{n\ln(1 - u_n)} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n\ln n} \quad (n \geq n_0).$$

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\ln n}$ divergeant (question 1), la série

$$\sum_{n \geq 2} -\frac{1}{n\ln(1 - u_n)}$$

diverge par comparaison.

(e) **Divergence de la série de terme général** $1 - u_n$. Par définition, $f(u_n) = n$, donc

$$n = \frac{-u_n}{(1 - u_n)\ln(1 - u_n)}.$$

On réarrange :

$$1 - u_n = u_n \left(-\frac{1}{n\ln(1 - u_n)} \right).$$

Or $u_n \rightarrow 1$, donc il existe N tel que $u_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour $n \geq \max(N, n_0)$,

$$1 - u_n \geq \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{n\ln(1 - u_n)} \right).$$

La série de droite divergeant (question précédente), la série $\sum(1 - u_n)$ diverge par comparaison.

On pourrait aussi dire que le terme de droite est équivalent à $\left(-\frac{1}{n \ln(1-u_n)}\right)$ qui est une série positive divergente, et donc $1 - u_n$ est équivalent à un terme général positif d'une série divergente, et diverge donc par théorème de comparaison.

Corrigé EDHEC 2025

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On considère, pour $x \in]n, +\infty[$,

$$f_n(x) = (x - n) \ln(x) - x \ln(x - n),$$

et la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

1. (a) **Variations de g .** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle, et

$$g'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de $g'(x)$ est celui de $1 - \ln x$. Ainsi,

$$g'(x) > 0 \text{ si } x < e, \quad g'(e) = 0, \quad g'(x) < 0 \text{ si } x > e.$$

Donc g est strictement croissante sur $]0, e]$ puis strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.

De plus, respectivement par produit usuel de limite et par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

$$\text{et } g(e) = \frac{1}{e}.$$

- (b) **Suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$.** Pour tout entier $k \geq 3$, on a $k \geq 3 > e$ donc g est décroissante sur $[3, +\infty[$, d'où

$$\forall k \geq 3, \quad g(k+1) \leq g(k),$$

c'est-à-dire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante.

Enfin, pour $k \geq 4$, par décroissance,

$$\frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}.$$

2. (a) **Dérivée de f_n .** La fonction f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle puisque $n \in \mathbb{N}^*$, et, pour tout $x > n$,

$$\forall x > n, \quad f'_n(x) = \ln x + \frac{x-n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n} = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n}.$$

- (b) **Décroissance de f_n .** On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h(x) = \ln(x) - x + 1.$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle, et

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Comme $x > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui de $1 - x$: on a donc

$$h'(x) > 0 \text{ si } 0 < x < 1, \quad h'(1) = 0, \quad h'(x) < 0 \text{ si } x > 1.$$

Ainsi, h est croissante sur $]0, 1]$ puis décroissante sur $[1, +\infty[$, et admet donc un maximum global en $x = 1$.

Or

$$h(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0.$$

Par conséquent, pour tout $x > 0$, on a $h(x) \leq h(1) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) - x + 1 \leq 0.$$

On en déduit l'inégalité cherchée :

$$\forall t > 0, \quad \ln(t) \leq t - 1.$$

On l'applique à $t = \frac{x}{x-n} > 0$ (car $x > n$), ce qui donne

$$\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) \leq \frac{x}{x-n} - 1 = \frac{n}{x-n}.$$

Ainsi, pour tout $x > n$,

$$f'_n(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n} \leq -1 + \frac{x-n}{x} = -\frac{n}{x} < 0.$$

Donc f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

- (c) **Existence et unicité de x_n .** Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

On calcule :

$$f_n(n+1) = (1) \ln(n+1) - (n+1) \ln(1) = \ln(n+1) > 0.$$

Ensuite,

$$f_n(n+2) = 2 \ln(n+2) - (n+2) \ln 2.$$

Or, comme $n \geq 2$, on a $n+2 \geq 4$ et, d'après la question 1.(b),

$$\frac{\ln(n+2)}{n+2} \leq \frac{\ln 2}{2} \implies 2 \ln(n+2) \leq (n+2) \ln 2,$$

donc $f_n(n+2) \leq 0$.

Par le théorème de la bijection, puisque f_n est continue et strictement décroissante sur $[n, n+1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution dans $[n+1, n+2]$.

3. **Équivalent $x_n \sim n$.** D'après la question précédente, pour tout $n \geq 2$,

$$n+1 \leq x_n \leq n+2.$$

En divisant par n (strictement positif) :

$$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

Les deux bornes convergent vers 1, donc par encadrement

$$\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x_n \sim_{+\infty} n.$$

4. (a) **Identité demandée.** Comme $f_n(x_n) = 0$, on a

$$(x_n - n) \ln(x_n) = x_n \ln(x_n - n).$$

Comme $x_n > n$, on peut diviser par x_n et on obtient :

$$\ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}.$$

(b) **Limite de $\frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et limite de $x_n - n$.** D'après $x_n \sim n$, on a $x_n \rightarrow +\infty$, donc

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Posons $a_n = x_n - n$. Alors, pour $n \geq 2$, on sait que $x_n \in [n+1, n+2]$, donc

$$1 \leq a_n \leq 2.$$

Avec 4.(a), on a

$$\ln(a_n) = a_n \frac{\ln(x_n)}{x_n} \implies \frac{\ln(a_n)}{a_n} = \frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Or la fonction $h : u \in [1, 2] \mapsto \frac{\ln u}{u}$ est continue et nulle uniquement en $u = 1$ sur $[1, 2]$. Comme (a_n) est à valeurs dans $[1, 2]$ et que $h(a_n) \rightarrow 0$, on en déduit

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \quad \text{donc} \quad x_n - n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

5. On définit, pour $n \geq 2$,

$$u_n = x_n - n - 1.$$

Alors $x_n - n = 1 + u_n$ et, d'après 4.(b), $u_n \rightarrow 0$.

(a) **Équivalents.** Comme $u_n \rightarrow 0$,

$$\ln(1 + u_n) \sim_{+\infty} u_n.$$

De plus,

$$\ln(1 + n + u_n) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1 + u_n}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1 + u_n}{n}\right).$$

Or $\frac{1+u_n}{n} \rightarrow 0$, donc $\ln\left(1 + \frac{1+u_n}{n}\right) \rightarrow 0$, et ainsi

$$\ln(1 + n + u_n) \sim_{+\infty} \ln n.$$

(b) **Asymptotique de u_n .** On réécrit l'égalité de 4.(a) en fonction de u_n :

$$\ln(1 + u_n) = (1 + u_n) \frac{\ln(n + 1 + u_n)}{n + 1 + u_n}.$$

Or, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$1 + u_n \rightarrow 1, \quad \ln(n + 1 + u_n) \sim \ln n, \quad n + 1 + u_n \sim n,$$

donc

$$(1 + u_n) \frac{\ln(n + 1 + u_n)}{n + 1 + u_n} \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Ainsi,

$$\ln(1 + u_n) \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Comme $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ (question a.), on obtient finalement

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

6. **Nature des séries** $\sum u_n$ **et** $\sum u_n^2$. On a $u_n \geq 0$ pour $n \geq 2$ (puisque $x_n \in [n+1, n+2]$), et

$$u_n \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n}$ diverge (cf question 1.b) de EDHEC 2018). Par

théorème de comparaison des séries à termes positifs, il en résulte que

$$\sum_{n \geq 2} u_n \text{ diverge.}$$

De plus,

$$u_n^2 \sim \frac{(\ln n)^2}{n^2}.$$

Et la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$ converge. En effet, $\frac{(\ln n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ par croissance comparée, et $\frac{1}{n^{3/2}}$ est le terme général d'une série qui converge absolument. Par théorème de comparaison,

$$\sum_{n \geq 2} u_n^2 \text{ converge.}$$