

DS de calcul – ECG1

EDHEC 2018 ECS - Exercice 1

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose

$$a_n = \frac{1}{n \ln n}.$$

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

- (b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n .

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.
3. On admet que f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 1/2$.
- (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
- (b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f .
- (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. (a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1 .
- (b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- (c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on a :

$$u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

- (d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général

$$-\frac{1}{n \ln(1 - u_n)}$$

est divergente.

- (e) Conclure, en revenant à la définition de u_n , que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

EDHEC Math approfondie 2025 - Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]n, +\infty[, \quad f_n(x) = (x - n) \ln(x) - x \ln(x - n).$$

On considère aussi une fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. (a) Dresser le tableau de variations de g , limites comprises.

- (b) En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante puis que :

$$\forall k \geq 4, \quad \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}.$$

2. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f'_n(x)$ pour tout réel $x > n$.

- (b) Montrer que pour tout réel $t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$. En déduire que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

- (c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n + 1, n + 2]$, admet une unique solution, que l'on note x_n .

3. Montrer l'équivalent suivant :

$$x_n \sim_{+\infty} n.$$

4. (a) Justifier que :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}.$$

- (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1.$$

5. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = x_n - n - 1.$$

- (a) Justifier que :

$$\ln(1 + u_n) \sim_{+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \ln(1 + n + u_n) \sim_{+\infty} \ln(n).$$

- (b) Avec la question 4.(a), montrer alors que :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

6. Déterminer la nature des séries de termes généraux u_n et u_n^2 .