

DS de calcul – ECG1

Exercice 0.

— Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

- 1) $f : x \mapsto x^4$ 4) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f : x \mapsto \sin(x) \cos(x)$
2) $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$ 5) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ 7) $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$
3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Exercice 1

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes. Préciser les ensembles de dérivabilités.

$$(a) f(x) = x^3 \ln x \quad (b) g(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^x} \quad (c) h(x) = \sqrt{1 + x^2}$$
$$(d) u(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x} \quad (e) v(x) = \arctan(1/x) \quad (f) w(x) = (1 - x^2)^5$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln x - \ln(1 + x).$$

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Étudier la dérivabilité de f sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
- Étudier la convexité de f et préciser l'existence éventuelle de points d'inflexions.

Exercice 3

- Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$
- En étudiant la fonction $f(x) = \sin(x) - x + x^3$, démontrer que :

$$\forall x \geq 0, |\sin(x) - x| \leq x^3.$$

Exercice 4

- Montrer que $\ln(n+1) - \ln n \sim \frac{1}{n}$.
- On pose $a_n = n \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right)$.
 - À l'aide d'une application de la formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ (ou de la connaissance de son cours), déterminer un équivalent de a_n .
 - En déduire la limite de $n a_n$.
- On pose $b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.
 - Montrer que $\ln(b_n) = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 + a_n$.
 - En déduire que $b_n \rightarrow e$ et déterminer un équivalent de $e - b_n$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- Montrer que $\ln n = o(\sqrt{n})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.