

DS de calcul – ECG1

Exercice 0.

— Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f : x \rightarrow \sin(x) \cos(x)$ Que vaut la dérivée de $\sin$? Et quelle est la primitive de $u'u$?
2. $f : x \rightarrow \frac{1}{x \ln(x)}$ Que vaut la dérivée de $x \rightarrow \ln(x)$? Et même remarque que ci-dessus
3. $P : x \rightarrow \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$
4. $f : x \rightarrow \frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Attention ! N'y a-t-il pas un cas particulier en fonction de n ?

Corrigé

Exercice 1

1. Calculer la dérivée de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow \arctan(x) + \arctan(1/x)$$

2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut f ?

Corrigé

Exercice 2

On considère la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}.$$

1. Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de

$$\ln(1+x) \quad \text{et} \quad \sin x.$$

2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 de

$$\ln(1+x) - \sin x.$$

3. Montrer que $f(x)$ admet une limite finie en 0 et déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

En déduire un équivalent de $\ln(1+x) - \sin x$ lorsque $x \rightarrow 0$.

4. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(1+x) - \sin x} - 1}{x^2}.$$

Souvenez vous : on peut composer avec des développements limités ! Et là, un équivalent usuel permettra de conclure

Corrigé

Exercice 3 – A faire pendant les 40 premières minutes

Une urne contient 1 boule rouge et 1 boule noire. Considérons le jeu suivant :

- **1ère étape** : on effectue des tirages successifs avec remise d'une boule jusqu'à l'obtention d'une boule rouge.
- **2ème étape** : Si on a effectué n tirages lors de la première étape, on effectue alors à nouveau n tirages d'une boule avec remise dans la même urne.

On note N la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués lors de la 1ère étape. On note X le nombre de boules rouges tirées lors de la 2ème étape.

1. Déterminer la loi de N et donner son espérance et sa variance.

2. (a) Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{(N=n)}(X = 0)$.
 (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On pourra utiliser la formule des probabilités totales. Si vous le faites, indiquez le système complet d'événements.

4. On pose : $\forall k \geq 0, \quad u_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{4^{n-k}}$
 - (a) Montrer que : $\forall k \geq 0, \quad \left(1 - \frac{1}{4}\right) u_{k+1} = u_k$.
 - (b) Déterminer la loi de probabilité de X .

[Corrigé](#)

Corrigé exercice 0

Ci-dessous, C est une constante réelle quelconque.

1. $F : x \rightarrow \frac{1}{2} \sin^2(x) + C$
2. $F : x \rightarrow \ln(\ln(x)) + C$
3. $F : x \rightarrow \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{x^k}{k+1} + C$
4. $F : x \rightarrow \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ si $n \neq 1$, $F : x \rightarrow \ln(x) + C$ sinon.

Corrigé exercice 1

1. Pour $x > 0$, on considère

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ comme somme et composée de fonctions usuelles de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$. Pour $x > 0$,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Posons $u : x \rightarrow \frac{1}{x}$. Alors $u' : x \rightarrow -\frac{1}{x^2}$ et

$$(\arctan(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

2. Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour trouver sa valeur, on évalue en $x = 1$:

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, pour tout $x > 0$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Corrigé exercice 2

On considère la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}.$$

1. On connaît les développements limités en 0, à l'ordre 3 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3).$$

2. On soustrait :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \sin x &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o_0(x^3) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o_0(x^3). \end{aligned}$$

3. On en déduit

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o_0(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + o_0(x).$$

Ainsi, $f(x)$ admet une limite finie en 0 et

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

De plus,

$$\ln(1+x) - \sin x \sim_0 -\frac{x^2}{2}$$

4. Posons $u(x) = \ln(1+x) - \sin x$. D'après la question précédente,

$$u(x) \sim_0 -\frac{x^2}{2}$$

donc $u(x) \rightarrow 0$. Or, lorsque $t \rightarrow 0$, on a l'équivalent usuel

$$e^t - 1 \sim_0 t.$$

En l'appliquant à $t = u(x)$, on obtient

$$e^{u(x)} - 1 \sim_0 u(x).$$

Par conséquent,

$$\frac{e^{\ln(1+x)-\sin x} - 1}{x^2} = \frac{e^{u(x)} - 1}{x^2} \sim \frac{u(x)}{x^2} = \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(1+x)-\sin x} - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.}$$

Corrigé exercice 3

- Ici, N compte le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir un succès. Les tentatives sont indépendantes, et le succès arrive avec proba $1/2$. Donc, $N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. Son espérance est donc de $1/(1/2) = 2$, et sa variance de $\frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$.
- (a) Sachant $[N = n]$, $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. En effet, on va effectuer n tirages indépendants, chacun avec probabilité de succès $1/2$. Donc,

$$\mathbb{P}(X = k | N = n) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Ainsi, $\mathbb{P}(X = 0 | N = n) = \binom{n}{0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$.

- (b) Par la formule des probabilités totales sur le SCE $([N = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = 0 | N = n) \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

On aura reconnu une somme géométrique convergente puisque $0 < 1/4 < 1$.

3. On refait une formule des probabilités totales sur le SCE $([N = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k | N = n) \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n}.$$

La somme démarre à k , puisque $k \geq 1$ et que, lorsque $n < k$, $\mathbb{P}(X = k | N = n) = 0$ puisqu'on ne peut tirer plus de boules rouges que de tirage effectué. On obtient donc le résultat souhaité, puisque $\frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4^n}$.

- (a) Tout d'abord, la série converge, puisqu'elle vaut 4^n fois la série ci-dessus (qui converge puisque c'est un calcul de probabilité). Ensuite :

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{4}\right) u_{k+1} &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} \frac{1}{4^{n-k-1}} - \frac{1}{4} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} \frac{1}{4^{n-k-1}} \\
&= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} \frac{1}{4^{n-k-1}} - \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} \frac{1}{4^{n-k}} \\
\text{Avec } l = n - 1 &= \sum_{l=k}^{+\infty} \binom{l+1}{k+1} \frac{1}{4^{l-k}} - \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} \frac{1}{4^{n-k}} \\
&= 1 + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left(\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} \right) \frac{1}{4^{n-k}} \\
&= 1 + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{4^{n-k}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{4^{n-k}} = u_k.
\end{aligned}$$

- (b) On en déduit que (u_k) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$. Donc, $u_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k u_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^k \frac{4}{3}$, car u_0 est une somme géométrique de raison $\frac{1}{4}$ valant donc $\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$. De plus, $u_k = P(X = k) \times 4^k$.
Donc, $P(X = k) = \frac{1}{3^k} \frac{4}{3} = \frac{4}{3^{k+1}}$ pour $k \geq 1$, et $P(X = 0) = 1/3$ pour $k = 0$.