

Exercice 1 EM Lyon 2022 ECE

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0; 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = k]) = q^k p = (1 - p)^k p.$$

PARTIE A :

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
3. Compléter la fonction *Python* suivante afin que, prenant en entrée le réel p , elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X .

```
import numpy.random as rd
def simule_X(p):
    Y = .....
    while .....
        Y = Y + 1
    X = Y - 1
    return X
```

PARTIE B :

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si k est égal à zéro, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;
- si k est un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit k variables aléatoires $X_1, \dots, X_k$, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $(X_1 + \dots + X_k)$ jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.

Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.

On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi $Z_0 = 1$.

On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X .

4. Compléter la fonction *Python* suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p , elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n .

Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```
def simule_Z(n,p):
    Z = 1
    for i in range(1, n+1):
        s = 0
        for j in range(1, Z+1):
            .....
        Z = .....
    return Z
```

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathbb{P}([Z_n = 0]).$$

On note également R l'évènement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. (a) Préciser les valeurs de u_0 et de u_1 .
 (b) Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

6. Justifier : $\mathbb{P}(R) = \ell$.
 7. (a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}_{[Z_1=k]}([Z_2 = 0]) = (u_1)^k.$$

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}_{[Z_1=k]}([Z_{n+1} = 0]) = (u_n)^k.$$

- (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z_1 = k]) (u_n)^k = \frac{p}{1 - qu_n}$.
 8. (a) Montrer que ℓ vérifie : $(\ell - 1)(q\ell - p) = 0$.
 (b) On suppose $p \geq \frac{1}{2}$. Montrer : $\mathbb{P}(R) = 1$.
 (c) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0; \frac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathbb{P}(R) < 1$.
 (d) Expliquer pourquoi le casino préférera choisir p dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

PARTIE C :

On suppose à présent que $p \geq \frac{1}{2}$.

Le casino cherche la valeur à donner à p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans ses consommations au bar.

On note T la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 1 - u_n$.

9. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}([T \leq n])$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([T = n]) = v_{n-1} - v_n$.
 10. Montrer, pour tout N de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N n \mathbb{P}([T = n]) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N.$$

11. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.
 (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$.
 (b) En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

12. On suppose maintenant que $p > \frac{1}{2}$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}.$$

- (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{q}{p} w_n$.
 (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$.
 (c) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et que l'on a :

$$\mathbb{E}(T) \leq \frac{1}{1 - \frac{q}{p}}.$$

13. Quelle(s) valeur(s) de p recommanderiez-vous au casino ?

Corrigé

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0; 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = q^k p = (1 - p)^k p.$$

PARTIE A :

1. Soit donc $Y = X + 1$: comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X + 1 = k) = \mathbb{P}(X = k - 1) = (1 - p)^{k-1} p$$

puisque $k - 1 \in \mathbb{N}$. On reconnaît ainsi que Y suit la loi géométrique de paramètre p .

2. D'après le cours sur la loi géométrique, Y admet une espérance et une variance qui valent :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \text{V}(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

La linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance assurent alors que $X = Y - 1$ admet elle aussi une espérance et une variance, qui valent :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1 - p}{p} = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad \text{V}(X) = \text{V}(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

3. La fonction Python qui suit fait partie des scripts au programme, à savoir retrouver le moment venu : le but est de simuler le temps d'attente d'un premier succès de probabilité p , Y étant alors le nombre d'essais réalisés.

```
import numpy.random as rd
def simule_X(p):
    Y = 1 #On fait toujours au moins un essai
    while rd.rand() > p : #Cet événement est de probabilité 1-p
        Y = Y + 1 #Tant qu'on a un échec, on continue
    X = Y - 1
    return X
```

PARTIE B :

4. La fonction suivante simule n parties : pour chacune d'entre elles, l'énoncé suppose que le joueur mise toute sa fortune, représentée par les variables aléatoires successives $Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$. À chaque partie, la variable Z représente donc le nombre de jetons introduits dans la machine ; et pour chaque jeton introduit, la valeur rendue par une nouvelle simulation de la variable X du script précédent, correspond au nombre (potentiellement nul) de jetons renvoyés en échange. On comprend ainsi la présence d'une double boucle for :

```
def simule_Z(n,p):
    Z = 1
    for i in range(1, n+1):
        s = 0 #A chaque nouvelle partie, le joueur joue tous ses jetons
        for j in range(1, Z+1):
            s += simul_X(p) # Chaque nouvelle fournée de jeton rendus s'ajoute à ceux déjà obtenus
        Z = s #Le nombre final de jetons définit la nouvelle valeur de Z
    return Z
```

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, un la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$.

On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. (a) À l'instant 0, on sait que le joueur dispose de façon certaine de $Z_0 = 1$ jeton, donc $u_0 = \mathbb{P}(Z_0 = 0) = 0$. Après la première activation de la machine : le joueur a joué son unique jeton, il peut donc perdre d'emblée si la machine ne lui renvoie aucun jeton ; c'est bien possible car le nombre de jetons rendus pour un seul jeton joué suit la loi de X , de sorte que :

$$u_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = q^0 p = p.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$: il est clair que si après n parties, le joueur n'a plus de jeton à jouer, alors il n'en a plus jamais par la suite, et notamment il n'en a plus pour jouer la $n + 1$ -ième partie. Autrement dit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $[Z_n = 0]$ implique l'événement $[Z_{n+1} = 0]$. Cette relation se traduit par l'inclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0].$$

Par croissance de la probabilité, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Z_n = 0) \leq \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante ; mais c'est une suite de probabilités ! Elle est donc aussi bornée par 0 et 1, donc majorée en particulier.

Le théorème de limite monotone assure alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et admet une limite $\ell \in [0 ; 1]$.

6. L'événement R est réalisé si et seulement si à une certaine partie, la fortune du joueur devient nulle (et le reste ensuite), donc si et seulement si l'un au moins des événements $[Z_n = 0]$ est réalisé, soit :

$$R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0].$$

Or comme on l'a vu, la suite d'événements $([Z_n = 0])_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion : la propriété de limite monotone pour les probabilités assure alors que

$$\mathbb{P}(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \iff \mathbb{P}(R) = \ell.$$

7. (a) Pour tout entier k de $\mathbb{N}$: $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0)$ est la probabilité qu'ayant récupéré k jetons après la première partie, ceux-ci soient tous joués ensuite sans aucun gain pour aucun d'entre eux. En appelant comme l'énoncé, $X_1, X_2, \dots, X_k$ les gains aléatoires pour chacun des k jetons joués à la deuxième partie, on peut donc écrire :

$$\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) = \mathbb{P}\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \dots \cap [X_k = 0]\right).$$

Le conditionnement par l'événement $[Z_1 = k]$ indique en effet uniquement le nombre de jetons joués à la deuxième partie : les comportements de la machine pour ces k jetons sont mutuellement indépendants, et indépendants de ce qui s'est passé avant ; comme les X_i suivent tous la même loi que X , on a donc :

$$\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}(X_2 = 0) \times \dots \times \mathbb{P}(X_k = 0) = (\mathbb{P}(X = 0))^k = p^k = (u_1)^k.$$

L'énoncé admettait ensuite que plus généralement, $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) = (u_n)^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

- (b) On est donc incité ici à écrire la formule des probabilités totales pour le calcul de $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$, avec le système complet d'événements $([Z_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k) \times \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k) (u_n)^k \text{ d'après a)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p (u_n)^k \quad Z_1 \text{ suit la même loi que } X \\ &= p \sum_{k=0}^{+\infty} (qu_n)^k \\ &= p \cdot \frac{1}{1 - qu_n} \quad \text{somme d'une série géométrique avec } 0 \leq qu_n < 1 \\ &= \frac{p}{1 - qu_n}. \end{aligned}$$

8. (a) On sait déjà d'après 5. que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et on dispose désormais de la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{p}{1 - qu_n}$; le principe d'unicité de la limite assure alors, par passage à la limite dans cette relation quand n tend vers $+\infty$, que :

$$\ell = \frac{p}{1 - q\ell} \iff \ell(1 - q\ell) = p \iff 0 = q\ell^2 - \ell + p.$$

Or si on développe la forme donnée par l'énoncé :

$$(\ell - 1)(q\ell - p) = q\ell^2 - p\ell - q\ell + p = q\ell^2 - (p + q)\ell + p = q\ell^2 - \ell + p$$

puisque $p + q = 1$. On a donc bien prouvé ainsi que ℓ vérifie : $(\ell - 1)(q\ell - p) = 0$.

- (b) D'après ce qui précède et la règle du produit nul : soit $\ell - 1 = 0 \iff \ell = 1$, soit $q\ell - p = 0 \iff \ell = \frac{p}{q}$.

Si $p > \frac{1}{2}$, alors logiquement $q = 1 - p \leq \frac{1}{2} \leq p$, donc $\frac{p}{q} > 1$. Dans l'équation-produit précédente, la seule solution est alors $\ell = 1$ (car $\ell \in [0, 1]$), et comme $\mathbb{P}(R) = \ell$ d'après 6., on peut conclure que :

$$\text{si } p > \frac{1}{2}, \text{ alors } \mathbb{P}(R) = 1.$$

- (c) On suppose désormais que $p < \frac{1}{2}$. Montrons par récurrence que la propriété $P(n) : "u_n \in \left[0 ; \frac{p}{q}\right]"$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I. Puisque $u_0 = 0$, $P(0)$ est vraie.

H. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $P(n + 1)$ est encore vraie.

On a supposé (H.R.) : $0 \leq u_n \leq \frac{p}{q}$, donc par opérations successives sur les inégalités :

$$\begin{aligned} 0 \geq -qu_n \geq -p &\iff 1 \geq 1 - qu_n \geq 1 - p = q > 0 \implies 1 \leq \frac{1}{1 - qu_n} \leq \frac{1}{q} \\ &\implies 0 < p \leq \frac{p}{1 - qu_n} = u_{n+1} \leq \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que $u_{n+1} \in \left[0 ; \frac{p}{q}\right]$, et donc que $P(n + 1)$ est vraie si $P(n)$ l'est.

C. La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Puisque $0 \leq u_n \leq \frac{p}{q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a aussi $0 \leq \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \frac{p}{q}$, donc $\mathbb{P}(R) \leq \frac{p}{q} < 1$ puisque :

$$0 \leq p < \frac{1}{2} \implies p < \frac{1}{2} < 1 - p = q \implies \frac{p}{q} < 1.$$

- (d) Le point de vue du casino conduit naturellement à chercher la ruine du joueur, après un temps plus ou moins long passé avec des jetons en poche, alors que l'alternative consiste à envisager le fait que le joueur puisse continuer indéfiniment à jouer, avec une probabilité non nulle.

On préférera donc s'assurer que $\mathbb{P}(R) = 1$, ce qui équivaut d'après les questions précédentes au fait de choisir $p > \frac{1}{2}$.

PARTIE C :

On suppose à présent que $p > \frac{1}{2}$.

9. L'événement $[Z_n = 0]$ signifie que le joueur n'a plus de jeton après n activations de la machine : soit il a perdu tous ses jetons à la n -ième activation, soit il n'en avait déjà plus à une activation précédente (et il aurait alors continué à activer la machine en vain, puisque sans jeton par la suite). Il y a donc égalité des événements $[Z_n = 0] = [T \leq n]$, donc égalité des probabilités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(T \leq n).$$

On réalise ensuite le raisonnement classique : puisque T est une variable discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^* : [T \leq n] = [T = n] \cup [T < n] = [T = n] \cup [T \leq n - 1]$. L'union est disjointe, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(T = n) + \mathbb{P}(T \leq n - 1) \iff \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \leq n) - \mathbb{P}(T \leq n - 1).$$

Soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = n) = u_n - u_{n-1} = (1 - v_n) - (1 - v_{n-1}) = v_{n-1} - v_n$.

10. On utilise la relation précédente pour calculer, pour tout N de $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n\mathbb{P}(T=n) &= \sum_{n=1}^N n(v_{n-1} - v_n) = \sum_{n=1}^N nv_{n-1} - \sum_{n=1}^N nv_n \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)v_k - \sum_{n=1}^N nv_n \quad [k=n-1] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} v_n + \sum_{n=0}^{N-1} nv_n - \sum_{n=1}^N nv_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N \quad \text{après télescopage.} \end{aligned}$$

11. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

(a) La relation de récurrence obtenue en 7.b) s'écrit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}u_n} \iff u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

On peut alors démontrer par récurrence que la propriété $Q(n)$: " $u_n = \frac{n}{n+1}$ ", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I. On sait que $u_0 = 0 = \frac{0}{0+1}$, donc $Q(0)$ est vraie.

H. Supposons $Q(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $Q(n+1)$ est encore vraie.

$$\text{On sait que : } u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \quad \text{H.R.} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2},$$

donc $Q(n)$ est vraie si $Q(n)$ l'est.

C. La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

(b) Dans ce cas on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = 1 - u_n = \frac{1}{n+1}$, et

$$\sum_{n=1}^N n\mathbb{P}(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N+1} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \frac{N}{N+1}.$$

Or on sait que la série harmonique diverge : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = +\infty$, tandis que $N+1 \sim_{N \rightarrow +\infty} N \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{N+1} = 1$.

On en déduit que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N n\mathbb{P}(T=n) = +\infty$, et donc que T n'admet pas d'espérance.

12. On suppose maintenant que $p > \frac{1}{2}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en repartant de la relation de récurrence obtenue en 7.b) :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{1 - u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} = \frac{1 - \frac{p}{1 - qu_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1 - qu_n}} = \frac{1 - p - qu_n}{1 - qu_n} \times \frac{q(1 - qu_n)}{p(1 - q) - pqu_n} = \frac{q^2(1 - u_n)}{p^2 - pqu_n} \\ &= \frac{q^2(1 - u_n)}{pq \left(\frac{p}{q} - u_n \right)} = \frac{q}{p} \times \frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n} = \frac{q}{p} w_n. \end{aligned}$$

(b) On vient donc de démontrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, de raison $\frac{q}{p}$ et de premier terme

$w_0 = \frac{1 - u_0}{\frac{p}{q} - u_0} = \frac{q}{p}$, de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1} \iff 1 - u_n = \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1} \left(\frac{p}{q} - u_n \right) \iff 1 - u_n = \left(\frac{q}{p} \right)^n - \left(\frac{q}{p} \right)^{n+1} u_n,$$

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right) u_n \iff u_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - u_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} - 1 + \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} = \left(\frac{q}{p}\right)^n \times \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$, où puisque

$p > \frac{1}{2}$, alors $p > \frac{1}{2} > q$ donc $\frac{q}{p} < 1$, ce qui implique :

$$\frac{q}{p} > \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \iff 0 < 1 - \frac{q}{p} < 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \implies 0 < \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} < 1,$$

et qui donne bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

- (c) Comme on vient de le revoir : puisque $p > \frac{1}{2}$, alors $p > q \implies 0 \leq \frac{q}{p} < 1$, et $\left(\frac{q}{p}\right)^n$ est par conséquent le terme général d'une série géométrique convergente.

Le résultat de b) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs assurent alors que la série $\sum_{n>0} v_n$ converge ; comme par ailleurs, $\lim_{N \rightarrow +\infty} N \left(\frac{q}{p}\right)^N = 0$ par croissances comparées (toujours du fait que $0 \leq \frac{q}{p} < 1$), donc par encadrement $\lim_{N \rightarrow +\infty} N v_N = 0$, et alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N n \mathbb{P}(T = n)$ existe et est finie.

Cette série à termes positifs, donc aussi absolument convergente, garantit ainsi que T admet une espérance égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(T = n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N \right)$.

Comme on l'a vu en b) : $\lim_{N \rightarrow +\infty} N v_N = 0$, et par passage à la somme dans l'inégalité de 12.b), puis à la limite quand N tend vers $+\infty$:

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{N-1} v_n \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} v_n \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{q}{p}}.$$

On a bien montré ainsi : $\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(T = n) \leq \frac{1}{1 - \frac{q}{p}}$.

13. Pour maximiser l'espérance du temps passé au casino, on peut chercher à maximiser son majorant $\frac{1}{1 - \frac{q}{p}}$.

Pour cela il faut minimiser le dénominateur $1 - \frac{q}{p}$, donc maximiser le rapport $\frac{q}{p}$.

Comme on l'a vu, ce rapport est pour $p > \frac{1}{2}$, compris entre 0 et 1 ; or la valeur 1 est atteinte par le quotient si et seulement si $q = p \iff p = \frac{1}{2}$: c'est la valeur qu'on peut conseiller au casino.