

DS de calcul – ECG1

Exercice 0.

— Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f : x \rightarrow \sin(x) \cos(x)$ Que vaut la dérivée de $\sin$? Et quelle est la primitive de $u'u$?
2. $f : x \rightarrow \frac{1}{x \ln(x)}$ Que vaut la dérivée de $x \rightarrow \ln(x)$? Et même remarque que ci-dessus
3. $P : x \rightarrow \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$
4. $f : x \rightarrow \frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Attention ! N'y a-t-il pas un cas particulier en fonction de n ?

Exercice 1

1. Calculer la dérivée de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow \arctan(x) + \arctan(1/x)$$

2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut f ?

Exercice 2

On considère la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}.$$

1. Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\sin x$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+x) - \sin x$.
3. Montrer que $f(x)$ admet une limite finie en 0 et déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

En déduire un équivalent de $\ln(1+x) - \sin x$ lorsque $x \rightarrow 0$.

4. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(1+x) - \sin x} - 1}{x^2}.$$

Souvenez vous : on peut composer avec des développements limités ! Et là, un équivalent usuel permettra de conclure

Exercice 3 – A faire pendant la première heure

Une urne contient 1 boule rouge et 1 boule noire. Considérons le jeu suivant :

- **1ère étape** : on effectue des tirages successifs avec remise d'une boule jusqu'à l'obtention d'une boule rouge.
- **2ème étape** : Si on a effectué n tirages lors de la première étape, on effectue alors à nouveau n tirages d'une boule avec remise dans la même urne.

On note N la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués lors de la 1ère étape. On note X le nombre de boules rouges tirées lors de la 2ème étape.

1. Déterminer la loi de N et donner son espérance et sa variance.
2. (a) Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{(N=n)}(X=0)$.
(b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X=0)$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On pourra utiliser la formule des probabilités totales. Si vous le faites, indiquez le système complet d'évènements.

4. On pose : $\forall k \geq 0, \quad u_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{4^{n-k}}$

(a) Rappeler ce que vaut, pour $k < n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(On ne demande pas le calcul explicite)

(b) Montrer que : $\forall k \geq 0, \quad \left(1 - \frac{1}{4}\right) u_{k+1} = u_k.$

(c) Calculer u_0 , puis en déduire u_k en fonction de k

(d) Déterminer la loi de probabilité de X .