

Devoir maison

À rendre pour le 29 septembre 2026

Ce devoir maison est composé, au choix :

- des exercices 1 et 2 ainsi que du problème 1 ;
- de l'exercice 1 et du problème 2.

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{|x+1| - 5}$.
2. Déterminer d'abord l'ensemble sur lequel l'équation suivante a un sens, puis la résoudre :

$$\ln(5x-3) + \ln(3x-2) = \ln(x-1) + \ln(2x+1).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$e \times e^{x^2-3x} \leq e^2.$$

Exercice 2 – Un peu de trigonométrie

1. Vérifier que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
2. À l'aide des formules trigonométriques usuelles, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
3. Pour tout réel a , exprimer $\cos^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$.
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Problème 1 – Étude d'une fonction et d'une suite récurrente

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

On admet le résultat suivant :

- Soit (u_n) une suite croissante. Alors, soit $u_n \rightarrow \ell$ pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$, soit $u_n \rightarrow +\infty$.
- Soit (u_n) une suite décroissante. Alors, soit $u_n \rightarrow \ell$ pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$, soit $u_n \rightarrow -\infty$.
- Si $u_n \rightarrow \ell$ et que f est **continue** en ℓ , alors $u_n \rightarrow \ell$ implique $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$.
- Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $u_{n+1} \rightarrow \ell$.

1. (a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
(b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
(c) Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x).$$

2. On considère désormais la fonction f définie, lorsque cela est possible, par $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

- (a) Déterminer précisément l'ensemble de définition D_f de f .
- (b) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

- (c) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.

On dressera un tableau de variations complet et on précisera également le signe de $f(x)$.

- (d) Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) - x = f(-x)$.

En déduire le signe de $f(x) - x$ suivant les valeurs de x .

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par un réel $u_0 > 0$ et par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
- (b) À l'aide de la question 2.(d), déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

En raisonnant par l'absurde sur la valeur de sa limite, montrer finalement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Problème 2 – Approximation de π par la méthode de Snellius

On pose $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x))$ et $g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}$.

1. (a) On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

- i. Vérifier que 1 est une racine de P .
- ii. En déduire qu'il existe trois réels a , b et c tels que $\forall X \in \mathbb{R}, P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.
- iii. Factoriser entièrement le polynôme P .

- (b) On définit la fonction u sur I par $u(x) = f(x) - x$.

Justifier que u est dérivable sur I , puis montrer que $\forall x \in I, u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.

- (c) En déduire les variations de u sur I .

- (d) On définit la fonction v sur I par $v(x) = x - g(x)$.

Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que : $\forall x \in I, v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}$.

Déterminer explicitement le polynôme Q .

- (e) En déduire les variations de v sur I .

- (f) Montrer finalement que : $\forall x \in I, g(x) < x < f(x)$.

2. (a) En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

- (b) En appliquant le résultat de la question 1.(f) à une valeur de x convenablement choisie, obtenir un encadrement de π par deux expressions faisant intervenir uniquement des fractions, des entiers et des racines carrées.

3. Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$ et $b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$.

- (a) Montrer que, pour tout réel θ , $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}} \quad (\star)$$

et

$$b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}}. \quad (\star\star)$$

- (b) En appliquant l'encadrement obtenu à la question 1.(f), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right).$$

- (c) Le but de cette question est de montrer que les deux membres de cet encadrement convergent vers π .

- i. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

- ii. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 9 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = 3\pi$.

- iii. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} = \pi$.

- iv. En suivant une démarche analogue, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right) = \pi$.

Remarque. Les relations $(\star)$ et $(\star\star)$ permettent de calculer récursivement a_n et b_n . Elles fournissent ainsi une méthode numérique simple pour obtenir des approximations de π . (cf un sujet d'Ecrisome...)