

Exercice principal

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x > 0$.
De plus, les limites usuelles donnent $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi,

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	$+\infty$

- (b) Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x = e^x - x - 1$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1$.
On a $g'(x) < 0$ si $x < 0$, $g'(0) = 0$ et $g'(x) > 0$ si $x > 0$. De plus, $g(0) = 0$. Ainsi,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x \geq 0$, avec égalité si, et seulement si, $x = 0$.

- (c) D'après la question précédente,

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff x = 0.$$

Ainsi, l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, qui est 0.

2. On suppose dans cette question que $u_0 > 0$.

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : \ll u_n > 0 \gg$.

- **Initialisation.** On a $u_0 > 0$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors $u_n > 0$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f(u_n) > f(0) = 0$. Ainsi, $u_{n+1} > 0$, donc $P(n+1)$ est vraie.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $u_n > 0$. Or, d'après la question 1.(b), pour tout $x > 0$, $f(x) - x > 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

- (c) Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u_n) est majorée.

Comme (u_n) est croissante et majorée, elle converge vers un réel ℓ . De plus, comme $u_n \geq u_0 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ell \geq u_0 > 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Or $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $\ell = f(\ell)$. D'après la question 1.(c), on obtient $\ell = 0$, ce qui contredit $\ell > 0$.

La suite (u_n) n'est donc pas majorée. Comme elle est croissante, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- (d) D'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geq 1$.

Montrons maintenant que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq (e-1)x$.

Posons, pour tout $x \geq 1$, $h(x) = f(x) - (e-1)x = e^x - 1 - (e-1)x$.
La fonction h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 1$,

$$h'(x) = e^x - (e-1) \geq e - (e-1) = 1 > 0.$$

Ainsi, h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Or $h(1) = 0$, donc, pour tout $x \geq 1$, $h(x) \geq 0$.
Ainsi, pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq (e-1)x$.

(e) Procédons par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_{n_0+n} \geq u_{n_0}(e-1)^n$.

— **Initialisation.** On a $u_{n_0} = u_{n_0}(e-1)^0$, donc $P(0)$ est vraie.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie.

La suite (u_n) étant croissante et $u_{n_0} \geq 1$, on a $u_{n_0+n} \geq 1$. D'après la question précédente,

$$u_{n_0+n+1} = f(u_{n_0+n}) \geq (e-1)u_{n_0+n} \underset{P(n)}{\geq} (e-1)u_{n_0}(e-1)^n = u_{n_0}(e-1)^{n+1}.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

(f) Comme $e-1 > 1$ et $u_{n_0} > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n_0}(e-1)^{n-n_0} = +\infty$.

Par comparaison et par la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. Procédons par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n = 0$.

— **Initialisation.** On a $u_0 = 0$, donc $P(0)$ est vraie.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors $u_n = 0$, donc $u_{n+1} = e^{u_n} - 1 = e^0 - 1 = 0$.
Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

4. On suppose dans cette question que $u_0 < 0$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : « u_n < 0 »$.

— **Initialisation.** On a $u_0 < 0$, donc $P(0)$ est vraie.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors $u_n < 0$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f(u_n) < f(0) = 0$. Ainsi, $u_{n+1} < 0$, donc $P(n+1)$ est vraie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $u_n < 0$. Or, d'après la question 1.(b), pour tout $x \neq 0$, $f(x) - x > 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et, d'après la question 4.(a), elle est majorée par 0. Elle converge donc vers un réel $\ell \leq 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$. D'après la question 1.(c), l'unique solution de cette équation est $\ell = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

5. On distingue trois cas :

— Si $u_0 > 0$, alors (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

— Si $u_0 = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. La suite est constante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

— Si $u_0 < 0$, alors (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice facultatif

Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \ln(x) + x$.

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$.

De plus, par somme de limites usuelles, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi,

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(b) Pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \ln(x)$. Ainsi,

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	+

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $u_n > 1$ ».

— **Initialisation.** On a $u_0 > 1$, donc $P(0)$ est vraie.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors $u_n > 1$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(u_n) > f(1)$.

Or $f(1) = 1$, donc $u_{n+1} > 1$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n > 1$, $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) > 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante.

(c) Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u_n) est majorée.

Comme (u_n) est croissante et majorée, elle converge vers un réel ℓ . De plus, $\ell \geq u_0 > 1$.

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ donne, par passage à la limite, $\ell = f(\ell)$.

Or

$$f(\ell) = \ell \iff \ln(\ell) + \ell = \ell \iff \ln(\ell) = 0 \iff \ell = 1,$$

ce qui contredit $\ell > 1$. Ainsi, la suite (u_n) n'est pas majorée.

(d) La suite (u_n) étant croissante et non majorée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. On suppose désormais que $u_0 = e$.

(a) D'après la question 2.(a), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. De plus, la suite (u_n) est croissante, donc $u_n \geq u_0 = e$.

Par croissance de la fonction logarithme, $\ln(u_n) \geq \ln(e) = 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \ln(u_n) \geq u_n + 1$.

(b) Procédons par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $u_n \geq n + e$ ».

— **Initialisation.** On a $u_0 = e = 0 + e$, donc $P(0)$ est vraie.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. D'après la question précédente, $u_{n+1} \geq u_n + 1$.

Par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \geq n + e + 1 = (n+1) + e$.

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

(c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + e) = +\infty$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + e$. Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 \in]0, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

- (a) Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

Montrons tout d'abord par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : 0 < v_n < 1$.

— **Initialisation.** Par hypothèse, $0 < v_0 < 1$, donc $P(0)$ est vraie.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors $0 < v_n < 1$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(v_n) < f(1) = 1$.

Ainsi, $v_{n+1} < 1$. Par ailleurs, d'après notre hypothèse de départ, $v_{n+1} > 0$. Ainsi, $0 < v_{n+1} < 1$, donc $P(n+1)$ est vraie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $v_n \in]0, 1[$. D'après la question 1.(b), $f(v_n) < v_n$, donc $v_{n+1} < v_n$. Ainsi, la suite (v_n) est décroissante.

Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \in [0, v_0]$.

Si $\ell > 0$, alors f est continue en ℓ et, par passage à la limite dans la relation $v_{n+1} = f(v_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$.

La seule solution de cette équation est $\ell = 1$, ce qui est impossible puisque $\ell \leq v_0 < 1$.

On a donc nécessairement $\ell = 0$. Mais alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et, puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = -\infty$, ce qui contredit la convergence de (v_n) vers 0.

Ainsi, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $v_r \leq 0$.

- (b) La suite (v_n) n'est alors plus définie à partir de l'indice $r+1$, puisque f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.