

DM n°1

On admet les résultats suivants :

- Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. Si elle n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 - Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$
 - Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ et que f est une fonction continue en ℓ , alors $f(u_n) \rightarrow \ell$.
-

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - 1.$$

1.
 - (a) Étudier les variations de la fonction f .
 - (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$.
 - (c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on déterminera.
2. On suppose dans cette question que $u_0 > 0$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
 - (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
 - (c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 - (d) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geq 1$. (On pourra utiliser la question 2.(c)).
Montrer ensuite que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq (e - 1)x$.
 - (e) En déduire que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}(e - 1)^{n-n_0}$.
 - (f) Retrouver alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. On suppose dans cette question que $u_0 = 0$. Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On suppose dans cette question que $u_0 < 0$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$.
 - (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - (c) Montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.
5. Donner, suivant la valeur de u_0 , le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice facultatif

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \ln(x) + x.$$

1.
 - (a) Étudier les variations de f .
 - (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 1$ et, pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
 - (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante.
 - (c) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
 - (d) En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. On suppose à présent que $u_0 = e$.
 - (a) Montrer que, pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n + 1$.
 - (b) En déduire que, pour tout entier n , $u_n \geq n + e$.
 - (c) Retrouver la limite de la suite (u_n) .
4. On pose $v_0 \in]0, 1[$ et on définit, tant que cela est possible, les termes v_n par la relation $v_{n+1} = f(v_n)$.
 - (a) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier r tel que $v_r \leq 0$.
 - (b) En déduire que v_{r+1} n'est pas défini.