
1 Écriture sans le symbole somme

Écrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes :

$$\sum_{\mathfrak{z}=1}^5 \mathfrak{z}^2, \quad \sum_{\mathfrak{Y}=10}^{30} (2^{\mathfrak{Y}} - 1), \quad \sum_{\mathfrak{O}=-2}^{20} \mathfrak{O}^2$$

Dans chaque cas, déterminer le nombre de termes dans la somme, puis la calculer.

2 Écriture avec le symbole somme et calcul

Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

$$S = \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \cdots + \ln(368)$$

$$T = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + a^{20}$$

$$U = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 22$$

$$V = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 96 + 97$$

$$W = 1000 + 1010 + 1020 + 1030 + \cdots + 1150$$

Puis, calculer leur valeur.

3 Écriture avec le symbole somme

Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$.

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{524}{524 \cdot 525}$$
$$B = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \cdots - \frac{236}{237} + \frac{237}{238}$$

4 Changement d'indice

Écrire les sommes suivantes en changeant l'indice pour que la première valeur soit 0 :

$$A = \sum_{\mathfrak{O}=10}^{20} \mathfrak{O}^{\mathfrak{O}-8}, \quad B = \sum_{\mathfrak{N}=-4}^{50} \frac{e^{\mathfrak{N}}}{\mathfrak{N}+5}, \quad C = \sum_{\mathfrak{I}=2}^{20} e^{\mathfrak{I}+3}$$

5 Simplification de sommes

Simplifier autant que possible les sommes suivantes :

$$A = \sum_{\Upsilon=1}^{20} \frac{1}{\Upsilon} - \sum_{\Omega=2}^{17} \frac{1}{\Omega+3}$$

$$B = \sum_{\aleph=1}^{20} (73\aleph^2 - 2\aleph + 4)$$

$$C = \sum_{k=2}^{20} (10i + 4), \quad \text{pour } i \in \mathbb{R}$$

$$D = \sum_{\spadesuit=0}^{100} \left(\sum_{k=0}^{\clubsuit} 2^k \right)$$

$$E = \sum_{\ominus=1}^n \ominus^3 - \sum_{\mathbb{P}=1}^n \sum_{\mathfrak{P}=\mathbb{P}}^n \sum_{\odot=1}^n \odot$$

6 Calcul de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2n}$$

$$B = 5^3 - 5^4 + \dots + 5^{527} - 5^{528}$$

7 Sommes géométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{\mathfrak{O}=-n}^{-1} \frac{2^{\mathfrak{O}}}{3^{\mathfrak{O}}}, \quad B_n = \sum_{\mathfrak{O}=2}^n \left(\frac{1}{3} \right)^{\mathfrak{O}+1}, \quad C_n = \sum_{\clubsuit=-1}^n \frac{5 \times 4^{\clubsuit}}{3^{\clubsuit+3}}$$

8 Produits dépendant de n

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer en fonction de n chacune des expressions suivantes :

$$\prod_{k=1}^n n, \quad \prod_{k=1}^n k, \quad \prod_{\mathbb{X}=2}^n \left(1 - \frac{1}{\mathbb{X}} \right)$$

9 Puissances et sommes

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^n x^k$. En déduire la valeur de $\sum_{\mathbb{X}=1}^n \mathbb{X} x^{\mathbb{X}-1}$

10 Un classique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer avec des factorielles : $A = \prod_{k=1}^n (2k+1)$, et $B = \prod_{k=1}^n 2k$

11 Somme logarithmique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{2} \right)$.

12 Récurrence et télescope

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + n(n-1)2^n$. On pose $v_n = \frac{u_n}{2^n}$.

1. Écrire la relation de récurrence vérifiée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. À l'aide d'un télescope, donner une expression de v_n , en fonction de n , puis en déduire u_n .

13 Sommes doubles

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m p(q^2 + 1), & B &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1, & C &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1, \\ D &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{j-1}{i} 2^i, & E &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} i 2^j, & F &= \sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j), \\ G &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} i, & H &= \sum_{0 \leq i, j \leq n} i \end{aligned}$$

Pour E , on pourra utiliser que, pour $x \neq 1$, $\sum_{k=1}^n k x^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

14 Inégalité sur tan

1. Démontrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan(x) \geq x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan(x) \geq x + \frac{x^3}{3}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \tan \left(\frac{k}{n} \right) \geq \frac{(n+1)(7n+1)}{12n}$.

• • • • 15 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux familles de réels. On veut démontrer :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

On introduit $P(x) = \sum_{i=1}^n (|a_i|x + |b_i|)^2$.

1. Montrer qu'il existe α, β, γ tels que $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
2. Que peut-on dire du signe de P ?
3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. À quelle condition a-t-on égalité ?

5. Montrer que $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

• • • • 16 Suite à récurrence linéaire

La suite (u_n) est définie par la donnée de deux réels u_0 et u_1 , et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2(n+1)u_n.$$

Exprimer u_n , tout d'abord avec puis sans utiliser le symbole produit $\prod$, en distinguant les cas selon la parité de n .

• • • • 17 Analyse-synthèse sur les entiers

Déterminer, par analyse-synthèse, l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels on peut séparer $\{1, \dots, n\}$ en deux sous-ensembles de sommes égales.

• • • • 18 Décomposition de sommes (d'après EML 2007 S)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad U_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1. En décomposant la somme de S_{2n+1} suivant les indices pairs et impairs, exprimer T_n en fonction de S_{2n+1} et S_n .
2. En décomposant la somme de U_n suivant les indices pairs et impairs, exprimer U_n en fonction de S_n et T_n , puis de S_{2n+1} et S_n .

• • • • 19 Sommes binomiales

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Les trois premières sommes sont intéressantes. Les sommes 4 à 8 s'adressent à ceux qui visent le top 5. Simplifier les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

$$5. \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$2. \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

$$6. \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$$

$$3. \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

$$7. \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$$

$$4. \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$$

$$8. \sum_{k=p}^n \binom{n}{k} \binom{k}{p}$$

● ● ● ○ 20 ESSEC 2018

Soit $r > 0$, $x \in [-r, r]$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in [-r, r]$. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$|(x+h)^n - x^n| \leq nr^{n-1}|h|.$$

● ● ○ ○ 21 EDHEC 2025

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$. Justifier que

$$B_n = \prod_{k=1}^n \frac{n+k}{4k}.$$