
1 Écriture sans le symbole somme

Écrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes :

$$\sum_{\mathfrak{z}=1}^5 \mathfrak{z}^2, \quad \sum_{\mathfrak{Y}=10}^{30} (2\mathfrak{Y} - 1), \quad \sum_{\mathfrak{z}=-2}^{20} \mathfrak{z}^2$$

Dans chaque cas, déterminer le nombre de termes dans la somme, puis la calculer.

Corrigé

1. La somme contient 5 termes et $\sum_{\mathfrak{z}=1}^5 \mathfrak{z}^2 = \frac{5 \times (5+1) \times (2 \times 5 + 1)}{6} = 55$.

2. La somme contient $30 - 10 + 1 = 21$ termes et

$$\sum_{\mathfrak{Y}=10}^{30} (2\mathfrak{Y} - 1) = 2 \sum_{\mathfrak{Y}=10}^{30} \mathfrak{Y} - \sum_{\mathfrak{Y}=10}^{30} 1 = 2 \times \frac{(10+30)21}{2} - 21 = 819.$$

3. La somme contient $20 - (-2) + 1 = 23$ termes et

$$\sum_{\mathfrak{z}=-2}^{20} \mathfrak{z}^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + \dots + 20^2 = 4 + 1 + \frac{20 \times (20+1) \times (2 \times 20 + 1)}{6} = 2875.$$

2 Écriture avec le symbole somme et calcul

Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

$$S = \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \dots + \ln(368)$$

$$T = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{20}$$

$$U = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 22$$

$$V = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 96 + 97$$

$$W = 1000 + 1010 + 1020 + 1030 + \dots + 1150$$

Puis, calculer leur valeur.

Corrigé

1. On a $S = \sum_{k=2}^{368} \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=2}^{368} k\right) = \ln(368!)$.

2. On a $T = \sum_{k=0}^{20} (-a)^k$.

$$\text{Si } a \neq -1, \text{ alors } T = \frac{1 - (-a)^{21}}{1 - (-a)} = \frac{1 + a^{21}}{1 + a}.$$

$$\text{Si } a = -1, \text{ alors } T = 21.$$

3. On a $U = \sum_{k=1}^{11} 2k = 2 \sum_{k=1}^{11} k = 2 \times \frac{11 \times 12}{2} = 132$.

4. On a $V = \sum_{k=1}^{97} (-1)^{k+1} k = (1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (95 - 96) + 97 = -48 + 97 = 49$.

5. On a $W = \sum_{k=0}^{15} (1000 + 10k) = 16 \times \frac{1000 + 1150}{2} = 17200$.

3 Écriture avec le symbole somme

Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$.

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{524}{524 \cdot 525}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \dots - \frac{236}{237} + \frac{237}{238}$$

Corrigé

1. On a $A = \sum_{k=1}^{524} \frac{k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{524} \frac{1}{k+1}$.

2. On a $B = \sum_{k=1}^{237} (-1)^{k+1} \frac{k}{k+1}$.

4 Changement d'indice

Écrire les sommes suivantes en changeant l'indice pour que la première valeur soit 0 :

$$A = \sum_{\mathfrak{O}=10}^{20} \mathfrak{O}^{\mathfrak{O}-8}, \quad B = \sum_{\mathfrak{K}=-4}^{50} \frac{e^{\mathfrak{K}}}{\mathfrak{K}+5}, \quad C = \sum_{\mathfrak{I}=2}^{20} e^{\mathfrak{I}+3}$$

Corrigé

1. On pose $k = \mathfrak{O} - 10$, donc $\mathfrak{O} = k + 10$. Lorsque $\mathfrak{O} = 10$, $k = 0$ et lorsque $\mathfrak{O} = 20$, $k = 10$.

Donc, $A = \sum_{k=0}^{10} (k+10)^{k+2}$.

2. On pose $k = \mathfrak{K} + 4$, donc $\mathfrak{K} = k - 4$. Lorsque $\mathfrak{K} = -4$, $k = 0$ et lorsque $\mathfrak{K} = 50$, $k = 54$.

Donc, $B = \sum_{k=0}^{54} \frac{e^{k-4}}{k+1}$.

3. On pose $k = \mathfrak{I} - 2$, donc $\mathfrak{I} = k + 2$. Lorsque $\mathfrak{I} = 2$, $k = 0$ et lorsque $\mathfrak{I} = 20$, $k = 18$.

Donc, $C = \sum_{k=0}^{18} e^{k+5}$.

5 Simplification de sommes

Simplifier autant que possible les sommes suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{\Upsilon=1}^{20} \frac{1}{\Upsilon} - \sum_{\mathfrak{O}=2}^{17} \frac{1}{\mathfrak{O}+3} \\
 B &= \sum_{\mathbb{X}=1}^{20} (73\mathbb{X}^2 - 2\mathbb{X} + 4) \\
 C &= \sum_{k=2}^{20} (10i + 4), \quad \text{pour } i \in \mathbb{R} \\
 D &= \sum_{\mathfrak{A}=0}^{100} \left(\sum_{k=0}^{\mathfrak{A}} 2^k \right) \\
 E &= \sum_{\ominus=1}^n \ominus^3 - \sum_{\mathbb{P}=1}^n \sum_{\mathfrak{X}=\mathbb{P}}^n \sum_{\ominus=1}^n \ominus
 \end{aligned}$$

Corrigé

1. En posant $k = \mathfrak{O} + 3$ dans la seconde somme, on obtient $A = \sum_{\Upsilon=1}^{20} \frac{1}{\Upsilon} - \sum_{k=5}^{20} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$.

2. Par linéarité de la somme,

$$B = 73 \sum_{\mathbb{X}=1}^{20} \mathbb{X}^2 - 2 \sum_{\mathbb{X}=1}^{20} \mathbb{X} + 4 \sum_{\mathbb{X}=1}^{20} 1 = 73 \times \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - 2 \times \frac{20 \times 21}{2} + 4 \times 20.$$

3. Le terme $10i + 4$ ne dépend pas de k et la somme contient $20 - 2 + 1 = 19$ termes. Ainsi,

$$C = \sum_{k=2}^{20} (10i + 4) = 19(10i + 4) = 190i + 76.$$

4. Pour tout $\mathfrak{A} \in \llbracket 0, 100 \rrbracket$, $\sum_{k=0}^{\mathfrak{A}} 2^k = 2^{\mathfrak{A}+1} - 1$. Ainsi,

$$D = \sum_{\mathfrak{A}=0}^{100} (2^{\mathfrak{A}+1} - 1) = \sum_{\mathfrak{A}=0}^{100} 2^{\mathfrak{A}+1} - 101 = 2 \sum_{\mathfrak{A}=0}^{100} 2^{\mathfrak{A}} - 101 = 2(2^{101} - 1) - 101 = 2^{102} - 103.$$

5. On remarque d'abord que $\sum_{\ominus=1}^n \ominus = \frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi (poser $k = (n - \mathbb{P} + 1)$ dans la dernière somme sibesoin),

$$\sum_{\mathbb{P}=1}^n \sum_{\mathfrak{X}=\mathbb{P}}^n \sum_{\ominus=1}^n \ominus = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{\mathbb{P}=1}^n \sum_{\mathfrak{X}=\mathbb{P}}^n 1 = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{\mathbb{P}=1}^n (n - \mathbb{P} + 1) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Or } \sum_{\ominus=1}^n \ominus^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2. \text{ Donc } E = 0.$$

6 Calcul de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2n}$$
$$B = 5^3 - 5^4 + \dots + 5^{527} - 5^{528}$$

Corrigé

1. On reconnaît une somme géométrique de raison 4. Ainsi, $A_n = \sum_{k=0}^n 4^k = \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$.
2. On factorise par 5^3 : $B = 5^3 (1 - 5 + 5^2 - \dots - 5^{525}) = 5^3 \sum_{k=0}^{525} (-5)^k$.

La somme contient 526 termes. Ainsi,

$$B = 5^3 \frac{1 - (-5)^{526}}{1 - (-5)} = \frac{5^3 (1 - 5^{526})}{6}.$$

7 Sommes géométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{\otimes=-n}^{-1} \frac{2^{\otimes}}{3^{\otimes}}, \quad B_n = \sum_{\otimes=2}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{\otimes+1}, \quad C_n = \sum_{\otimes=-1}^n \frac{5 \times 4^{\otimes}}{3^{\otimes+3}}$$

Corrigé

1. On pose $k = -\otimes$. Lorsque $\otimes = -n$, $k = n$ et lorsque $\otimes = -1$, $k = 1$. Ainsi,

$$A_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{3}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}} = 3 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right).$$

2. En posant $k = \otimes - 2$, on obtient $B_n = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+3} = \frac{1}{27} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{27} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{18} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right).$

3. On a $C_n = \frac{5}{27} \sum_{\otimes=-1}^n \left(\frac{4}{3}\right)^{\otimes}$. Cette somme géométrique contient $n+2$ termes, son premier terme

$$\text{vaut } \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4} \text{ et sa raison vaut } \frac{4}{3}. \text{ Ainsi, } C_n = \frac{5}{27} \times \frac{3}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+2}}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{5}{12} \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{n+2} - 1 \right).$$

8 Produits dépendant de n

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer en fonction de n chacune des expressions suivantes :

$$\prod_{k=1}^n n, \quad \prod_{k=1}^n k, \quad \prod_{\text{✂}=2}^n \left(1 - \frac{1}{\text{✂}}\right)$$

Corrigé

1. Le produit contient n facteurs tous égaux à n . Ainsi, $\prod_{k=1}^n n = n^n$.

2. Par définition de la factorielle, $\prod_{k=1}^n k = n!$.

3. On a $\prod_{\text{✂}=2}^n \left(1 - \frac{1}{\text{✂}}\right) = \prod_{\text{✂}=2}^n \frac{\text{✂} - 1}{\text{✂}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$.

Pour le faire autrement, plus formellement :

$$\begin{aligned} \prod_{\text{✂}=2}^n \left(1 - \frac{1}{\text{✂}}\right) &= \prod_{\text{✂}=2}^n \frac{\text{✂} - 1}{\text{✂}} \\ &= \frac{\prod_{\text{✂}=2}^n (\text{✂} - 1)}{\prod_{\text{✂}=2}^n \text{✂}} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{\text{✂}=2}^n \text{✂}} \quad (k = \text{✂} - 1) \\ &= \frac{1 \times \prod_{k=2}^{n-1} k}{\left(\prod_{k=2}^{n-1} k\right) \times n} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

9 Puissances et sommes

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^n x^k$. En déduire la valeur de $\sum_{\text{✂}=1}^n \text{✂} x^{\text{✂}-1}$

Corrigé

On sait que, pour tout $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, et, pour $x = 1$, $\sum_{k=0}^n x^k = n+1$.

En dérivant cette égalité, pour $x \neq 1$, on obtient $\sum_{k=1}^n k x^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

Pour $x = 1$, $\sum_{k=1}^n k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

10 Un classique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer avec des factorielles : $A = \prod_{k=1}^n (2k+1)$, et $B = \prod_{k=1}^n 2k$

Corrigé

1. On a $(2n+1)! = \left(\prod_{k=1}^n 2k \right) \left(\prod_{k=1}^n (2k+1) \right)$. Or $\prod_{k=1}^n 2k = 2^n n!$. Ainsi, $A = \prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

2. On a $B = \prod_{k=1}^n 2k = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$.

11 Somme logarithmique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{2}\right)$.

Corrigé

Par propriété du logarithme, $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{2}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{2}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n k\right) - \ln\left(\prod_{k=1}^n 2\right) = \ln(n!) - \ln(2^n) = \ln(n!) - n \ln(2)$.

12 Somme et inégalité sur une suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $u_n \leq 2^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

BONUS : Déterminer u_n (astucieux, difficile).

Corrigé

Procédons par récurrence forte. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P(n) : u_n \leq 2^n - 1$.

- **Initialisation.** On a $u_1 = 1 \leq 2^1 - 1$. Ainsi, $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(1), \dots, P(n)$. On a $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \leq u_0 + \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = 2^{n+1} - (n+1) \leq 2^{n+1} - 1$.

Bonus : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = u_n + u_n = 2u_n$. De plus, $u_1 = u_0 = 1$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison 2 et $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

13 Réurrence et télescopage

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + n(n-1)2^n$. On pose $v_n = \frac{u_n}{2^n}$.

1. Écrire la relation de récurrence vérifiée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. À l'aide d'un télescopage, donner une expression de v_n , en fonction de n , puis en déduire u_n .

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2u_n + n(n-1)2^n}{2^{n+1}} = \frac{u_n}{2^n} + \frac{n(n-1)}{2} = v_n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. On remarque d'abord que $v_0 = u_0 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par télescopage,

$$\begin{aligned} v_n - v_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} \right) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \text{ Donc, } u_n = 2^n v_n = 2^n \left(1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right).$$

14 Sommes doubles

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m p(q^2 + 1), & B &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1, & C &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1, \\ D &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{j-1}{i} 2^i, & E &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} i 2^j, & F &= \sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j), \\ G &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} i, & H &= \sum_{0 \leq i, j \leq n} i \end{aligned}$$

$$\text{Pour } E, \text{ on pourra utiliser que, pour } x \neq 1, \sum_{k=1}^n k x^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Corrigé

1. En séparant les deux sommes, on obtient

$$A = \sum_{p=0}^n p \sum_{q=0}^m (q^2 + 1) = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + m + 1 \right).$$

2. On calcule une somme, puis l'autre : $B = \sum_{i=1}^n n = n^2$.

3. Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la somme intérieure contient i termes. Ainsi, $C = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. On somme d'abord par rapport à i : $D = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} 2^i$.

$$\text{Par la formule du binôme de Newton, } \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} 2^i = (1+2)^{j-1} = 3^{j-1}.$$

$$\text{Ainsi, } D = \sum_{j=1}^n 3^{j-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^n-1}{2}.$$

5. On somme d'abord par rapport à j : $E = \sum_{i=0}^{n-1} i \sum_{j=i+1}^n 2^j$.

$$\text{Pour tout } i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{j=i+1}^n 2^j = 2^{n+1} - 2^{i+1}.$$

Ainsi, par l'indication pour le traitement de la dernière somme,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=0}^{n-1} i (2^{n+1} - 2^{i+1}) = 2^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} i - 4 \sum_{i=0}^{n-1} i 2^{i-1} = 2^{n+1} \frac{n(n-1)}{2} - 4 \left(1 + (n-2)2^{n-1} \right) \\ &= (n^2 - 3n + 4) 2^n - 4. \end{aligned}$$

6. On sépare les couples tels que $i < j$, ceux tels que $j < i$ et ceux tels que $i = j$. Par symétrie,

$$\begin{aligned} F &= 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} j + \sum_{i=0}^n i = 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} j + \sum_{i=0}^n i = 2 \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{i=0}^n i \\ &= 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}. \end{aligned}$$

7. On somme d'abord par rapport à i :

$$G = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j i = \sum_{j=0}^n \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^n j^2 + \sum_{j=0}^n j \right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

8. On a $H = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n i = \sum_{i=0}^n (n+1)i = (n+1) \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2}$.

15 Inégalité sur tan

1. Démontrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) \geq x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) \geq x + \frac{x^3}{3}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \tan\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{(n+1)(7n+1)}{12n}$.

Corrigé

1. On pose, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \tan(x) - x$.

Alors f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = \tan^2(x) \geq 0$. Il vient

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

Ainsi, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) \geq f(0) = 0$, donc $\tan(x) \geq x$.

2. On pose, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan(x) - x - \frac{x^3}{3}$. Alors g est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) = \tan^2(x) - x^2$, et $g''(x) = 2 \tan(x)(1 + \tan^2(x)) - 2x = 2(\tan(x) + \tan^3(x) - x)$.

D'après la question précédente, $\tan(x) \geq x$, et bien sûr $\tan^3(x) \geq 0$. Donc $g''(x) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On obtient alors le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$	+	
$g'(x)$	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	0	+
$g(x)$	0	$+\infty$

Ainsi, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g(x) \geq 0$, donc $\tan(x) \geq x + \frac{x^3}{3}$.

3. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a bien $\frac{k}{n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après la question 2., $\tan\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{k}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{n}\right)^3$.

En sommant pour k allant de 1 à n , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \tan\left(\frac{k}{n}\right) &\geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{3n^3} \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3n^3} \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n+1}{2} + \frac{(n+1)^2}{12n} \\ &= \frac{(n+1)(7n+1)}{12n}. \end{aligned}$$

16 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux familles de réels. On veut démontrer :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

On introduit $P(x) = \sum_{i=1}^n (|a_i|x + |b_i|)^2$.

1. Montrer qu'il existe α, β, γ tels que $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
2. Que peut-on dire du signe de P ?
3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. À quelle condition a-t-on égalité ?
5. Montrer que $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

Corrigé

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$P(x) = \sum_{i=1}^n (|a_i|x + |b_i|)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 x^2 + 2|a_i b_i|x + b_i^2) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n |a_i b_i|\right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Ainsi, en posant $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i^2$, $\beta = 2 \sum_{i=1}^n |a_i b_i|$ et $\gamma = \sum_{i=1}^n b_i^2$, on a bien $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

On eut aussi pu dire que P est une somme de polynômes de degré au plus 2, et est donc un polynôme de degré au plus 2.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est une somme de carrés. Ainsi, $P(x) \geq 0$.

3. Si $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$, alors tous les a_i sont nuls et l'inégalité est immédiate.

Supposons donc $\alpha > 0$. Puisque P est un polynôme du second degré positif sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif ou nul. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Delta \leq 0 &\implies \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0 \implies 4 \left(\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \right)^2 \leq 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \\ &\implies \left(\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).\end{aligned}$$

Les deux membres étant positifs, on en déduit $\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$.

4. Si l'une des deux familles est nulle, il y a égalité.

Supposons qu'aucune des deux familles n'est nulle. Il y a égalité si, et seulement si, $\Delta = 0$, c'est-à-dire si P admet une racine réelle x_0 . On a alors

$$0 = P(x_0) = \sum_{i=1}^n (|a_i| x_0 + |b_i|)^2.$$

Une somme de réels positifs étant nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls, on obtient $|a_i| x_0 + |b_i| = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En posant $\lambda = -x_0 > 0$, on a $|b_i| = \lambda |a_i|$ pour tout i . Il y a donc égalité si, et seulement si, les familles $(|a_i|)_{1 \leq i \leq n}$ et $(|b_i|)_{1 \leq i \leq n}$ sont proportionnelles.

5. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux familles $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ définie par $b_i = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On obtient

$$\sum_{i=1}^n |a_i| = \sum_{i=1}^n |a_i \times 1| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

17 Suite à récurrence linéaire

La suite (u_n) est définie par la donnée de deux réels u_0 et u_1 , et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2(n+1)u_n.$$

Exprimer u_n , tout d'abord avec puis sans utiliser le symbole produit $\prod$, en distinguant les cas selon la parité de n .

Corrigé

Distinguons les cas selon la parité de n .

- Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, en appliquant la relation de récurrence au rang $2k$, on obtient $u_{2k+2} = -2(2k+1)u_{2k}$.

Ainsi, (si besoin, faites une récurrence pour le démontrer), et en utilisant l'exercice 10 pour la dernière égalité,

$$u_{2p} = u_0 \prod_{k=0}^{p-1} (-2(2k+1)) = (-2)^p u_0 \prod_{k=0}^{p-1} (2k+1) = (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} u_0.$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, en appliquant la relation de récurrence au rang $2k+1$, on obtient $u_{2k+3} = -2(2k+2)u_{2k+1} = -4(k+1)u_{2k+1}$.

$$\text{Ainsi, } u_{2p+1} = u_1 \prod_{k=0}^{p-1} (-4(k+1)) = (-4)^p u_1 \prod_{k=0}^{p-1} (k+1) = (-4)^p p! u_1.$$

18 Analyse-synthèse sur les entiers

Déterminer, par analyse-synthèse, l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels on peut séparer $\{1, \dots, n\}$ en deux sous-ensembles de sommes égales.

Corrigé

- **Analyse.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $I_1, I_2 \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ disjoints tel que $\llbracket 1, n \rrbracket = I_1 \cup I_2$ et tel que $\sum_{k \in I_1} k = \sum_{k \in I_2} k$. Puisque $\sum_{k \in I_1 \cup I_2} k = \sum_{k \in I_1} k = \sum_{k \in I_2} k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, on en déduit que $\sum_{k \in I_1} k = \frac{n(n+1)}{4}$. Donc, ou alors n est divisible par 4, ou alors $n+1$ est divisible par 4.
- **Synthèse.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue deux cas :

1. **Cas 1.** Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 4p$. On note alors $I_1 = \{1, 2, \dots, p, 3p+1, \dots, 4p\}$ et $I_2 = \llbracket p+1, 3p \rrbracket$. On vérifie bien que $\sum_{k \in I_1} k = \sum_{k \in I_2} k$, donc cela convient.
2. **Cas 2.** Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 4p-1$. On va essayer de revenir au cas précédent en remarquant que $4p-1 = (4p-2)+1$. Il reste $\llbracket 2, 4(p-1)+1 \rrbracket$, que l'on peut traiter comme le cas précédent (un nombre d'entiers consécutifs multiple de 4). On pose donc $I_1 = \{1, 4p-2\} \cup \{2, 3, \dots, p, 3(p-1)+2, \dots, 4(p-1)+1\}$ et $I_2 = \{4p-1\} \cup \{p+1, \dots, 3(p-1)+1\}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $1 + (4p-2) + \sum_{k=2}^p k + \sum_{k=3(p-1)+2}^{4(p-1)+1} k = (4p-1) + \sum_{k=p+1}^{3(p-1)+1} k$.

19 Décomposition de sommes (d'après EML 2007 S)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad U_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1. En décomposant la somme de S_{2n+1} suivant les indices pairs et impairs, exprimer T_n en fonction de S_{2n+1} et S_n .

2. En décomposant la somme de U_n suivant les indices pairs et impairs, exprimer U_n en fonction de S_n et T_n , puis de S_{2n+1} et S_n .

Corrigé

1. En séparant les indices pairs et impairs, on obtient

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = T_n + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = T_n + \frac{1}{4} S_n.$$

2. En séparant de nouveau les indices pairs et impairs, on obtient

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} S_n - T_n.$$

$$\text{D'après la question précédente, } U_n = \frac{1}{4} S_n - \left(S_{2n+1} - \frac{1}{4} S_n \right) = \frac{1}{2} S_n - S_{2n+1}.$$

20 Sommes binomiales

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Les trois premières sommes sont intéressantes. Les sommes 4 à 8 s'adressent à ceux qui visent le top 5. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

5. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

2. $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$

6. $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$

3. $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

7. $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$

4. $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$

8. $\sum_{k=p}^n \binom{n}{k} \binom{k}{p}$

Corrigé

1. Pour $n \geq 1$, on utilise le lemme du pion, i.e. l'identité $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

$$\text{Avec le changement de variable } (j = k-1) = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}.$$

Cette formule reste vraie pour $n = 0$.

2. Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} \\ \text{Lemme du pion} &= n \sum_{k=2}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} \\ \text{Lemme du pion} &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} \\ j = k-2 &= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} = n(n-1)2^{n-2}.\end{aligned}$$

Cette formule reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

3. On remarque que $k^2 = k(k-1) + k$. D'après les deux questions précédentes,

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

4. Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, en multipliant et en divisant par $p!$,

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!}{(p-k)!k!} = \binom{n}{p} \binom{p}{k}.$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

5. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, par le lemme du pion, $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$, donc $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \\ \text{Changement de variable } j = k+1 &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \\ \text{Astuce : on ajoute et retire le terme "manquant"} &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} - \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{0} \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.\end{aligned}$$

6. D'après la formule de Pascal, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

Ainsi, par télescopage,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \\ &= \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} \\ &= \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

7. D'après la question 4,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} &= \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \\ &= \binom{n}{p} (1-1)^p.\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \geq 1. \end{cases}$

8. Pour tout $k \in \llbracket p, n \rrbracket$, $\binom{n}{k} \binom{k}{p} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{k-p}$. Ainsi,

$$\sum_{k=p}^n \binom{n}{k} \binom{k}{p} = \binom{n}{p} \sum_{k=p}^n \binom{n-p}{k-p} = \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{n-p} \binom{n-p}{j} = 2^{n-p} \binom{n}{p}.$$

21 ESSEC 2018

Soit $r > 0$, $x \in [-r, r]$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in [-r, r]$. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$|(x+h)^n - x^n| \leq nr^{n-1}|h|.$$

Corrigé

Si quelqu'un utilise la formule du binôme, il a perdu ! Il faut utiliser $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$. Cela donne, si $n \geq 1$, par inégalité triangulaire puis par hypothèse :

$$\begin{aligned}|(x+h)^n - x^n| &= \left| (x+h-x) \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^k x^{n-1-k} \right| \leq |h| \sum_{k=0}^{n-1} |(x+h)^k x^{n-1-k}| \\ &\leq |h| \sum_{k=0}^{n-1} r^k r^{n-1-k} \\ &= |h| \sum_{k=0}^{n-1} r^{n-1} = n|h|r^{n-1}\end{aligned}$$

Si $n = 0$, c'est évident.

22 EDHEC 2025

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$. Justifier que $B_n = \prod_{k=1}^n \frac{n+k}{4k}$.

Corrigé

$$\text{On a } B_n = \frac{1}{4^n} \frac{(n+1) \times (n+2) \times \cdots \times 2n}{1 \times 2 \times \cdots \times n} = \frac{1}{4^n} \times \frac{\prod_{k=n+1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{1}{4^n} \times \frac{\prod_{k=1}^n (n+k)}{\prod_{k=1}^n k} = \prod_{k=1}^n \frac{n+k}{4k}.$$