

1 Matrices rectangulaires

Définition: Matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *matrice de taille* $n \times p$ tout tableau A à n lignes et p colonnes, dont les éléments sont des réels $a_{i,j}$, avec $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$.

On note une telle matrice de différentes manières :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}, \quad \text{ou} \quad A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}.$$

Par défaut, si leur notation n'est pas précisée, les coefficients d'une matrice A sont notés $A_{i,j}$ ou $a_{i,j}$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels.

Remarque:

- Cas $n = 1$: $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices lignes* ou *vecteurs lignes*, de la forme $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p)$.
- Cas $p = 1$: $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices colonnes* ou *vecteurs colonnes*, de la forme $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
- Cas $n = p$: on parle de *matrice carrée*. On écrit simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
- Cas $n = p = 1$: les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ n'ont qu'un seul coefficient. On identifie donc $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. On a

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

2. La *matrice nulle*, notée $0_{n,p}$ ou encore simplement 0 , est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.
3. On appelle *matrice identité* de taille n la matrice carrée :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Somme et multiplication par un scalaire

Définition: Somme et produit par un scalaire

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

— On définit la matrice $A + B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$(A + B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad \text{pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket.$$

— On définit la matrice λA comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$(\lambda A)_{i,j} = \lambda a_{i,j}, \quad \text{pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket.$$

Remarque:

La matrice $A + B$ est obtenue en additionnant les coefficients de A et ceux de B , et la matrice λA est obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ . On dit qu'il s'agit d'opérations "coefficient par coefficient".

Remarque:

Il est indispensable que les matrices A et B soient de la même taille pour pouvoir en faire la somme.

Exemple. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad A + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les propriétés suivantes découlent des définitions, et leurs preuves sont laissées en exercices.

Proposition: Propriétés

Soient A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $A + B = B + A$,
- $A + 0_{n,p} = A$,
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
- $1A = A$,
- $\lambda A = 0_{n,p} \iff \lambda = 0$ ou $A = 0_{n,p}$,
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Définition: Matrices élémentaires

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on introduit la matrice $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient sur la i -ème ligne et j -ème colonne qui vaut 1.

Les matrices $E_{i,j}$ sont appelées les *matrices élémentaires* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad A = E_{1,1} + 2E_{1,2} + 3E_{1,3} + 4E_{2,1} + 5E_{2,2} + 6E_{2,3}.$$

Remarque:

De manière générale, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, on a :

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j},$$

et cette écriture est unique.

2.2 Produit matriciel

La définition suivante est à apprendre PAR COEUR.

Définition: Produit matriciel

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit le *produit* AB comme la matrice de taille $n \times q$ de coefficients $(c_{i,j})$ donnés par la formule :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque:

- Pour pouvoir définir le produit AB , il faut que le *nombre de colonnes de A* soit égal au *nombre de lignes de B*.
- Il peut donc arriver que le produit AB soit bien défini, mais pas le produit BA .
- Lorsque A et B sont deux matrices carrées de même taille, le produit AB est bien défini, tout comme BA .

Le schéma ci-dessous représente la manière de comprendre le calcul du produit de deux matrices. Il sera utile dans un premier temps de présenter les deux matrices de cette manière pour faire le calcul de leur produit.

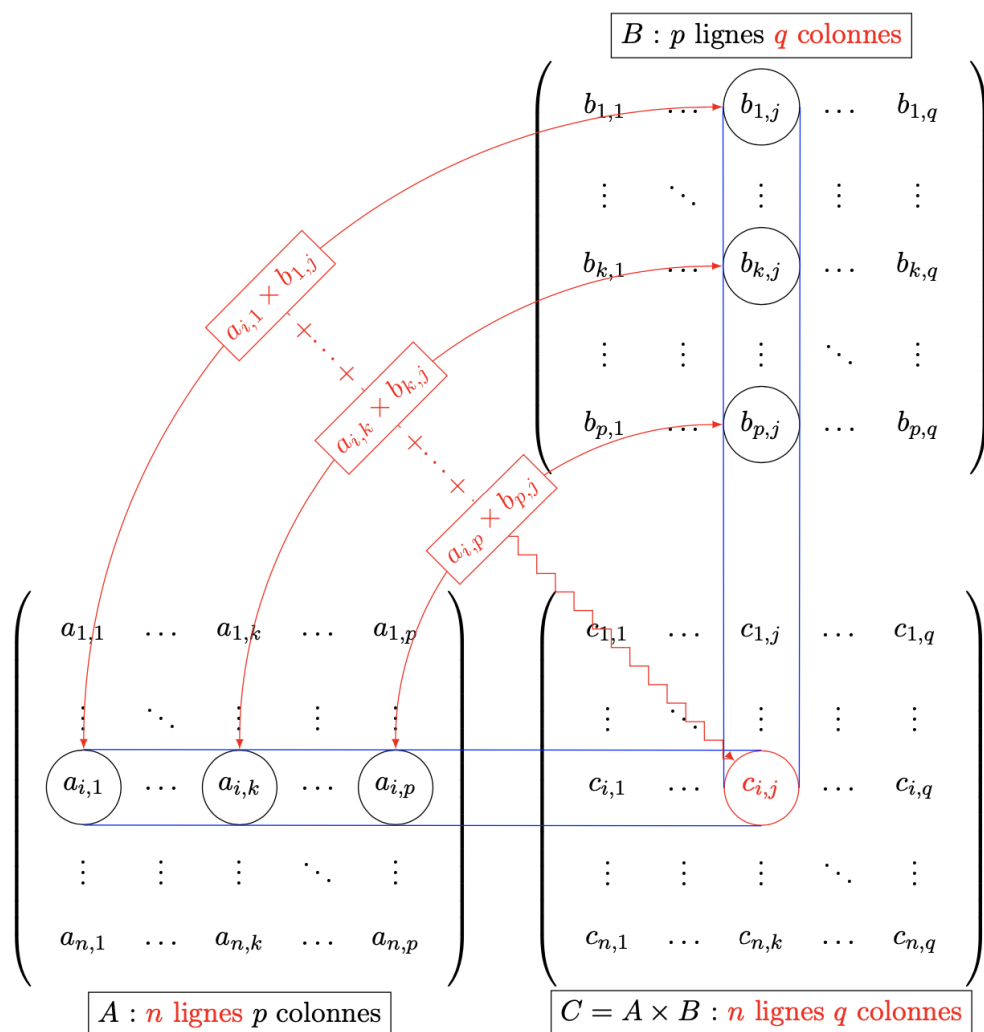


FIGURE 1 – Schéma du produit matriciel

Exemples. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB , BA , CA et BC .

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Remarque:

DANGER Le produit matriciel ne se comporte pas du tout comme le produit de nombres réels.

— Le produit matriciel n'est **pas commutatif** : même lorsque les deux matrices existent et ont même taille, en général

$$AB \neq BA.$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Par conséquent, de nombreuses manipulations usuelles sur les réels sont fausses sur les matrices. Par exemple, si A et B sont des matrices carrées,
 - $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, mais en général $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
 - $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2$, mais en général $(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2$.
- Par ailleurs,

$$AB = 0 \quad \text{n'implique pas} \quad (A = 0 \text{ ou } B = 0).$$

Autrement dit, deux matrices non nulles peuvent avoir un produit nul.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Une conséquence importante est que même lorsque A est non nulle,

$$AB = AC \quad \text{n'implique pas} \quad B = C.$$

On peut écrire cela lorsque A est inversible... Voir la définition de la section suivante.

- On ne divise *jamais* par une matrice. Une telle opération n'a pas de sens.

Proposition: Propriétés du produit matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

$$AI_p = A, \quad I_n A = A, \quad A0_{p,q} = 0_{n,q}, \quad 0_{r,n} A = 0_{r,p}.$$

Soient A, B, C trois matrices et $\lambda \in \mathbb{R}$. Lorsque les opérations effectuées sont licites, c'est-à-dire bien définies :

- $(A + B)C = AC + BC$,
- $A(B + C) = AB + AC$,
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda AB$,
- $A(BC) = (AB)C$.

Démonstration. À l'exception de la dernière, toutes ces propriétés découlent directement des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Vérifions donc $A(BC) = (AB)C$. On suppose $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a :

$$(A(BC))_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} (BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} \left(\sum_{l=1}^q b_{k,l} c_{l,j} \right) = \sum_{l=1}^q \left(\sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,l} \right) c_{l,j} = ((AB)C)_{i,j}.$$

D'où le résultat.

Exemple. Si le produit de deux matrices A et B existe, alors $A(2B) = 2AB$.

Définition: Matrices commutantes

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $AB = BA$, on dit que A et B *commutent*.

Remarque:

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A commute avec elle-même.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A commute avec I_n : $AI_n = I_n A = A$.

Exercice 1. Vérifier que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

commutent.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Transposée d'une matrice

Définition: Transposée d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la *matrice transposée* de A comme la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, notée tA (ou parfois A^T), telle que :

$$({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}.$$

Remarque:

La transposition d'une matrice a pour effet de transformer les lignes en colonnes et réciproquement. Lorsque A est carrée, on obtient tA en faisant une symétrie des coefficients par rapport à la diagonale.

Exemple.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 5 & 8 & 8 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{alors } {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque:

Si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a ${}^tE_{i,j} = E_{j,i}$.

Proposition: Propriétés de la transposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, et λ, μ deux réels. On a :

- ${}^t({}^tA) = A$ (Involutivité de la transposition)
- ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$ (Linéarité de la transposition)
- ${}^t(AC) = {}^tC {}^tA$

Démonstration. Les deux premières propriétés découlent directement des définitions, et sont laissées en exercice.

Montrons la troisième : d'après la définition de la transposition, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on veut montrer que pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$({}^t(AC))_{i,j} = (AC)_{j,i} = \sum_{k=1}^p a_{j,k} c_{k,i} = \sum_{k=1}^p ({}^tA)_{k,j} ({}^tC)_{i,k} = ({}^tC {}^tA)_{i,j}.$$

D'où le résultat. □

Exemple. Si le produit de deux matrices A et B existe, alors ${}^tA(2B) = 2{}^tB {}^tA$.

3 Matrices carrées

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.1 Matrices diagonales, matrices triangulaires

3.1.1 Matrices diagonales

Définition: Matrice diagonale

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est *diagonale* si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, tous ses coefficients non diagonaux sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

On note parfois $A = \text{Diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$.

Exemples. I_n et $0_{n,n}$ sont des matrices diagonales de taille n .

Un produit, une somme, de matrices diagonales est encore diagonale. La transposée ou la multiplication par un réel d'une matrice diagonale est encore diagonale. On dit que l'ensemble des matrices diagonales est *stable* par ces opérations. C'est ce qu'exprime la proposition suivante.

Proposition:

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Si $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, alors :

- $A + B = \text{Diag}(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n)$,
- $AB = \text{Diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$,
- $\lambda A = \text{Diag}(\lambda\lambda_1, \dots, \lambda\lambda_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
- ${}^t A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = A$.

3.1.2 Matrices triangulaires

On appelle *matrice triangulaire* une matrice dont les coefficients de la partie inférieure ou supérieure sont tous nuls.

Définition: Matrice triangulaire

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On dit que A est *triangulaire supérieure* si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que tous ses coefficients sous la diagonale sont nuls. Autrement dit,

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

2. On dit que A est *triangulaire inférieure* si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que tous ses coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls. Autrement dit,

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Remarque:

- La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure, et réciproquement.
- Une matrice diagonale est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure.

Proposition: Somme et produit de matrices triangulaires

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures), alors $A + B$ et AB sont aussi triangulaires supérieures (resp. inférieures).

De plus, si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Nous montrons le résultat pour des matrices triangulaires supérieures. La preuve du cas inférieur est analogue.

On suppose que A et B sont triangulaires supérieures.

- Si $i > j$, alors $a_{i,j} = 0$ et $b_{i,j} = 0$. Donc $(A + B)_{i,j} = 0$, ce qui montre que $A + B$ est encore triangulaire supérieure.
- Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $i > j$. On a :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=i}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

- Si $k < i$, alors $a_{i,k} = 0$.

- Si $k \geq i$, alors $k > j$, donc $b_{k,j} = 0$.

Donc chaque terme du produit est nul, et $(AB)_{i,j} = 0$. Ainsi AB est triangulaire supérieure.

- Enfin, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = a_{i,i} b_{i,i} = \lambda_i \mu_i.$$

3.2 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition: Matrice symétrique, antisymétrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— On dit que A est *symétrique* si ${}^tA = A$, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = a_{j,i}.$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— On dit que A est *antisymétrique* si ${}^tA = -A$, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = -a_{j,i}.$$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}).$$

Remarque:

- Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.
- L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) est stable par somme, mais pas par produit.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Montrer par analyse-synthèse que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3.3 Puissances d'une matrice carrée

Définition: Puissances successives d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit par récurrence les *puissances successives* de A par :

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{p+1} = A^p A = A A^p \end{cases}$$

On a ainsi $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$.

Remarque:

Si A n'est pas une matrice carrée, on ne peut pas définir A^p .

Exercice 4. Calculer A^2 et A^3 où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 , B^3 , puis conjecturer une expression de B^n et la démontrer.

Proposition: Propriétés des puissances de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On a :

- $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$,
- $(A^p)^q = A^{pq}$.

En particulier, A commute avec toutes ses puissances.

Par convention, $A^0 = I_n$.

Remarque:

- Si A et B sont des matrices carrées et $p \in \mathbb{N}$, on n'a pas en général $(AB)^p = A^p B^p$. En effet :

$$(AB)^p = ABAB \cdots AB,$$

ce qui est en général différent de $A^p B^p$, puisque le produit matriciel n'est pas commutatif.

- Si les matrices A et B commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$, on a par contre $(AB)^p = A^p B^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- Par conséquent, on a :

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \quad (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2, \quad (A - B)(A + B) = A^2 - B^2,$$

et même la formule plus générale :

$$A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k} \quad (\text{Formule de Bernoulli}).$$

Proposition: Puissance d'une matrice diagonale

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$D^p = \text{Diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p).$$

Proposition: Formule du binôme

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Démonstration.

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a :

$$(A + B)^0 = I_n = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} A^{0-k} B^k = \binom{0}{0} A^0 B^0 = I_n.$$

Hérédité : supposons la formule vraie au rang n , c'est-à-dire :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Alors :

$$(A + B)^{n+1} = (A + B)^n (A + B).$$

On développe avec l'hypothèse de récurrence :

$$= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k \right) (A + B).$$

On distribue le produit à droite :

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k A + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^{k+1}.$$

Or, comme $AB = BA$, on peut échanger l'ordre :

$$A^{n-k} B^k A = A^{n-k+1} B^k.$$

On effectue un changement d'indice dans la deuxième somme : $\ell = k + 1$, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k+1} B^k + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} A^{n-(\ell-1)} B^\ell.$$

On renomme $\ell \rightarrow k$ dans la seconde somme pour avoir une expression en k sur les deux :

$$= \binom{n}{0} A^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] A^{n+1-k} B^k + \binom{n}{n} B^{n+1}.$$

En utilisant l'identité $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, on obtient :

$$(A + B)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A^{n+1-k} B^k.$$

Cela conclut la démonstration. □

3.4 Définition

Proposition: Définition – Matrice inversible, inverse d'une matrice

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Dans ce cas, la matrice B , appelée *inverse de A* , est unique. On la note A^{-1} . On a ainsi

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

L'ensemble des matrices inversibles de taille n est noté $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Nous allons montrer que l'inverse est unique. Supposons que A admette deux inverses B et B' . Alors

$$B' = B'AB = (B'A)B = B.$$

Ceci montre bien l'unicité de la matrice inverse de A . □

Remarque:

- Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^{-1} est inversible, et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exemples.

1. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA,$$

donc A est inversible, d'inverse B .

2. I_n est inversible : $I_n^{-1} = I_n$.
3. 0_n n'est pas inversible : pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AB = 0_n = BA \neq I_n$.

Proposition:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = 0_n$, alors A n'est pas inversible.

Démonstration. Supposons que A soit inversible. Alors

$$A^{-1}AB = A^{-1}0_n = 0_n \Rightarrow B = 0_n,$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent, A n'est pas inversible. $\square$

La proposition suivante que l'on admet pour le moment nous permet de calculer uniquement le produit d'un côté pour vérifier qu'une matrice est inversible :

Proposition:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow A \text{ est inversible à gauche : } \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), BA = I_n$$

$$\Leftrightarrow A \text{ est inversible à droite : } \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = I_n$$

Dans tous les cas, A^{-1} est l'inverse à droite (resp. à gauche).

Complément : polynôme de matrice**Définition: Polynôme de matrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $P(X) = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel. On appelle *polynôme de matrice* le polynôme $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$P(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Ce type d'expression est souvent utilisé pour prouver que certaines matrices sont inversibles ou pour les diagonaliser.

Méthode: Calcul de l'inverse à l'aide d'une équation polynomiale

Lorsqu'on sait que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie une équation polynomiale :

$$a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0,$$

avec $a_0 \neq 0$, on peut en déduire que A est inversible.

On factorise :

$$A \left(\frac{a_k}{a_0} A^{k-1} + \dots + \frac{a_1}{a_0} I_n \right) = -I_n, \quad \text{donc} \quad A^{-1} = - \left(\frac{a_k}{a_0} A^{k-1} + \dots + \frac{a_1}{a_0} I_n \right).$$

Ceci montre que A est inversible, et donne une expression explicite de son inverse.

Exemples.

— Si on sait que $A^2 + A - I_n = 0_n$, alors on peut écrire :

$$A^2 + A = I_n \Rightarrow A(A + I_n) = I_n,$$

ce qui montre que A est inversible et que son inverse est donné par :

$$A^{-1} = A + I_n.$$

— Si on a $A^3 - 3A = 2I_n$, alors

$$A(A^2 - 3I_n) = 2I_n, \quad \text{puis} \quad A \left(\frac{1}{2}(A^2 - 3I_n) \right) = I_n,$$

donc A est inversible, et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I_n).$$

Exercice 6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A^3 = -A^2 + 3A - 3I_3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

3.5 Inverse et opérations

Proposition: Opérations sur les matrices inversibles

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles. Alors :

- Si $\lambda \neq 0$, alors λA est inversible, et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.
- AB est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- ${}^t A$ est inversible, et $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible, et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$. On note dans ce cas $A^{-p} = (A^{-1})^p$.

Démonstration.

— On a $(\lambda A)(\frac{1}{\lambda} A^{-1}) = AA^{-1} = I_n$, d'où le résultat.

— On a :

$$(B^{-1} A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = I_n.$$

Donc AB est inversible, d'inverse $B^{-1} A^{-1}$.

— On a :

$${}^t A^{-1} {}^t A = {}^t (AA^{-1}) = {}^t I_n = I_n.$$

D'où le résultat.

— On sait que A et A^{-1} commutent, donc

$$(A^{-1})^p A^p = (A^{-1}A)^p = I_n^p = I_n.$$

□

Remarque:

D'après ce qui précède, l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est stable par multiplication, inverse et transposition.

En revanche, $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable par somme : en général, la somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible.

Par exemple,

$$I_n + (-I_n) = 0_n, \quad \text{donc } I_n + (-I_n) \text{ n'est pas inversible.}$$

3.6 Cas des matrices 2×2

Définition: Déterminant

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit le *déterminant* de A , noté $\det A$, par :

$$\det A = ad - bc.$$

Proposition: Inverse d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0.$$

Dans ce cas, l'inverse est donné par :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On remarque que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2.$$

Par conséquent :

- Si $\det A = ad - bc \neq 0$, alors $A \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2$, donc A est inversible.
- Si $\det A = 0$, alors le produit vaut 0_2 , ce qui implique que A n'est pas inversible.

□

Exercice 7. Étudier l'inversibilité et, le cas échéant, calculer l'inverse des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.7 Cas des matrices diagonales et triangulaires

Proposition: Inversibilité d'une matrice diagonale

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La matrice A est inversible si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i \neq 0$. Dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

- Si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i \neq 0$, alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = I_n.$$

D'où A est inversible, et $A^{-1} = \text{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

- S'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_i = 0$, alors

$$A \times \text{Diag}(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0) = \text{Diag}(0, \dots, 0, \lambda_i, 0, \dots, 0) = 0_n.$$

Comme ce produit est nul et le facteur à droite non nul, cela entraîne que A n'est pas inversible.

□

Exemple. La matrice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{est inversible, et} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Proposition: Inversibilité d'une matrice triangulaire

Une matrice triangulaire A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les inverses des coefficients diagonaux de A .

Remarque:

Cette propriété est admise pour l'instant. Il est à noter qu'il n'y a pas de formule générale pour l'inverse d'une matrice triangulaire.