
1 Calculs

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calculer, lorsque c'est possible : $A + B$, AB , BA , AX , BX , A^2 , tA , tB , ${}^tA \cdot {}^tB$.

2 Calcul

1. Soient $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$. Calculer LC et CL , si cela a un sens.
2. Soient $X = (x_1 \quad \dots \quad x_n)$, $Y = (y_1 \quad \dots \quad y_n)$. Calculer si possible ${}^tX \cdot Y$ et $X \cdot {}^tY$.

3 Calculs

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB , ${}^tA \cdot {}^tB$, et ${}^tB \cdot {}^tA$.
2. Vérifier que ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.
3. Calculer, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$

4 Construction de matrices

1. Construire les deux matrices de $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ de coefficients $|i - 2j|$ et $\max(i, j)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la forme générale des matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

si $i \geq j + 1$, alors $a_{ij} = 0$, sinon $a_{ij} = i$ si $i + j = n + 1$, alors $b_{ij} = 1$, sinon $b_{ij} = 0$.

5 Exercice (question de concours)

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si tous ses coefficients sont positifs ou nuls, et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

1. Traduire cette définition avec des quantificateurs. Donner un exemple de matrice stochastique.
2. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore stochastique.

6 Conjecture - récurrence

Déterminer A^n , B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (conjecture puis démonstration par récurrence si nécessaire) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

● ● ○ ○ 7 Puissance de matrice

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A = \frac{1}{3}(M - I)$, puis A^2 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I + u_n A$, avec $u_n = 1 - (-2)^n$.

● ● ○ ○ 8 Puissance de matrice

On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^2 , Q^2 , PQ , QP .
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A = aP + bQ$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^n P + b^n Q$. En déduire une expression explicite de A^n .

● ● ● ○ 9 Commutant

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

● ● ○ ○ 10 Commutant

1. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec : $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$.
2. En déduire les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $X^2 = B$.

● ● ● ○ 11 Commutant

Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .

1. Calculer le produit $P^t P$. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1} .
2. Calculer la matrice $D = P^{-1} A P$ et vérifier que D est diagonale. En déduire une expression de A en fonction de D , P et P^{-1} .
3. En déduire par une récurrence l'expression de A^n en fonction de P , P^{-1} , D et n . Donner alors l'expression matricielle (sous forme d'un seul tableau de nombres) de A^3 .

-
4. Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $DN = ND$, où N est une nouvelle matrice dont on donnera l'expression en fonction de M .
 5. Expliciter l'ensemble $\mathcal{C}(D)$ des matrices qui commutent avec D , i.e. $\mathcal{C}(D) = \{C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), DC = CD\}$.
 6. En déduire une expression explicite de $\mathcal{C}(A)$.

● ● ● ● 12 Application du cours

Soit A une matrice symétrique et inversible. Montrer que A^{-1} est symétrique.

● ● ● ● 13 Polynôme de matrice

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 - 3A^2 + 5A = 0_n$. Déterminer A^{-1} en fonction de A .

● ● ● ● 14 Polynôme de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^4 + 4A^3 + A^2 - A + I_n = 0_n$, $A^5 + A^6 = 0_n$. Montrer que $A = -I_n$.

● ● ● ● 15 Matrice nilpotente ; factorisation matricielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent.

1. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A et B^p commutent.
2. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, A^q et B^p commutent.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A^m - B^m = (A - B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$.
4. Soit N une matrice telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^m = 0_n$. Montrer que $I_n + N$ est inversible et déterminer son inverse.

● ● ● ● 16 Etude de suite

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$.
2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, v_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - v_n, \quad v_{n+1} = 3v_n. \end{cases}$$

- (a) Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$.
- (b) En déduire une expression explicite de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de u_0 et v_0 .

17 Type concours

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - A$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I_2 .
3. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
4. Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.
5. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n . L'expression trouvée est-elle encore valable pour $n = -1$?

On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2}, & u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3 \end{cases}$$

7. Calculer u_2 et u_3 .
8. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un entier naturel n et renvoyant en sortie la valeur de u_n .

On pose $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

9. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_{n+1} = AX_n + B$.
(b) Résoudre l'équation $AY + B = Y$, d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On notera L la matrice solution obtenue.
(c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $X_n = A^n(X_0 - L) + L$
10. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{3}{10}(3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}$

18 Type concours

Pour tout réel a , on définit la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la ou les valeurs de c pour lesquelles $M(c) = I_2$.
2. Démontrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $M(a)M(b) = M(a+b-2ab)$.
3. On suppose $a \neq \frac{1}{2}$. Montrer alors que la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer en fonction de a le réel b tel que $M(b) = M(a)^{-1}$.
La matrice $M(1/2)$ est-elle inversible ?
4. Déterminer l'unique réel non nul a_0 tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$.
5. On considère maintenant les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_2 - P$.

-
- (a) Calculer P^2, PQ, QP et Q^2 . (On donnera les résultats en fonction des matrices P et Q ou de la matrice nulle.)
 - (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le réel α tel que $M(a) = P + \alpha Q$.
 - (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $(M(a))^n$ en fonction de P, Q, α et n .
 - (d) Expliciter la matrice $(M(a))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

19 Type concours

Considérons $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les réels λ de sorte que la matrice $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.
2. Résoudre l'équation $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner sa matrice inverse.
4. Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.
5. Soient $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\Delta = P^{-1}MP$. Établir : $M^2 = A \iff \Delta^2 = D$
6. (a) Soit Δ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$. Démontrer que Δ et D commutent et en déduire que Δ est une matrice diagonale.
 (b) Résoudre finalement l'équation $\Delta^2 = D$, d'inconnue $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Déterminer toutes les solutions de l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.