
1 Calculs

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calculer, lorsque c'est possible : $A + B$, AB , BA , AX , BX , A^2 , tA , tB , ${}^tA \cdot {}^tB$.

Corrigé

On a $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La somme $A + B$ n'est pas définie, car A et B n'ont pas la même taille.

$$\text{On a } AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Le produit AX n'est pas défini, car le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de X .

$$\text{En revanche, } BX = \begin{pmatrix} 2y + z \\ 2x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

Le produit A^2 n'est pas défini, car A n'est pas carrée.

$$\text{Enfin, } {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } {}^tA \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2 Calcul

1. Soient $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$. Calculer LC et CL , si cela a un sens.
2. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$. Calculer si possible ${}^tX \cdot Y$ et $X \cdot {}^tY$.

Corrigé

1. On a $L \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Les deux produits sont donc définis.

$$\text{On obtient } LC = ad + be + cf \text{ et } CL = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & bd & cd \\ ae & be & ce \\ af & bf & cf \end{pmatrix}.$$

2. On a $X, Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Ainsi, ${}^tX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tY \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc les deux produits sont définis.

$$\text{On obtient } {}^tX \cdot Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix} \text{ et } X \cdot {}^tY = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

3 Calculs

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB , ${}^tA \cdot {}^tB$, et ${}^tB \cdot {}^tA$.
2. Vérifier que ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.
3. Calculer, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$

Corrigé

1. On obtient $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Comme A est symétrique, ${}^tA = A$. Ainsi, ${}^tA \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et ${}^tB \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

2. On a ${}^t(AB) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = {}^tB \cdot {}^tA$.

3. On obtient $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$.

D'après les formules d'addition, $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$.

4 Construction de matrices

1. Construire les deux matrices de $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ de coefficients $|i - 2j|$ et $\max(i, j)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la forme générale des matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :
si $i \geq j + 1$, alors $a_{ij} = 0$, sinon $a_{ij} = i$ si $i + j = n + 1$, alors $b_{ij} = 1$, sinon $b_{ij} = 0$.

Corrigé

1. Pour la première matrice, le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j est $|i - 2j|$. On obtient donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pour la seconde matrice, on obtient donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. On a $a_{ij} = 0$ lorsque $i > j$, et $a_{ij} = i$ lorsque $i \leq j$. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, $b_{ij} = 1$ lorsque $i + j = n + 1$, et $b_{ij} = 0$ sinon. Ainsi,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Exercice (question de concours)

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si tous ses coefficients sont positifs ou nuls, et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

1. Traduire cette définition avec des quantificateurs. Donner un exemple de matrice stochastique.
2. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore stochastique.

Corrigé

1. En notant $M = (m_{ij})$, la matrice M est stochastique si et seulement si

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, & m_{ij} \geq 0, \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, & \sum_{j=1}^n m_{ij} = 1. \end{cases}$$

Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est stochastique.

2. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices stochastiques, et posons $C = AB = (c_{ij})$.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. Les coefficients de A et de B étant positifs ou nuls, on a $c_{ij} \geq 0$.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{j=1}^n b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} = 1.$$

Ainsi, AB est une matrice stochastique.

6 Conjecture - récurrence

Déterminer A^n , B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (conjecture puis démonstration par récurrence si nécessaire) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $A^n = A^{n-2} A^2 = 0_2$.

Donc

$$A^n = \begin{cases} I_2 & \text{si } n = 0, \\ A & \text{si } n = 1, \\ 0_2 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

2. On calcule $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P(n)$: $B^n = B$.

- **Initialisation.** On a $B^1 = B$, donc $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$. Alors $B^{n+1} = B^n B = BB = B^2 = B$, donc $P(n+1)$ est vraie.

3. On calcule $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$: $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Initialisation.** On a $C^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Alors $C^{n+1} = C^n C = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $P(n+1)$ est vraie.

7 Puissance de matrice

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A = \frac{1}{3}(M - I)$, puis A^2 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I + u_n A$, avec $u_n = 1 - (-2)^n$.

Corrigé

1. On obtient $A = \frac{1}{3}(M - I_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$: $M^n = I_3 + u_n A$.

- **Initialisation.** On a $u_0 = 1 - 1 = 0$, donc $I_3 + u_0 A = I_3 = M^0$. Ainsi, $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Comme $M = I_3 + 3A$, on a

$$M^{n+1} = M^n M = (I_3 + u_n A)(I_3 + 3A) = I_3 + (3 + u_n)A + 3u_n A^2 = I_3 + (3 - 2u_n)A.$$

Or $3 - 2u_n = 3 - 2(1 - (-2)^n) = 1 - (-2)^{n+1} = u_{n+1}$. Ainsi, $M^{n+1} = I_3 + u_{n+1} A$.

8 Puissance de matrice

On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^2 , Q^2 , PQ , QP .
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A = aP + bQ$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^n P + b^n Q$. En déduire une expression explicite de A^n .

Corrigé

1. On obtient $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $PQ = QP = 0_3$.
2. **Première méthode, astucieuse.** Comme $P = I_3 - Q$, on a $aP + bQ = aI_3 + (b - a)Q$. Or $A = -3I_3 + 6Q$. Ainsi, $a = -3$ et $b = 3$, donc $A = -3P + 3Q$.

Seconde méthode, par un système. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A = aP + bQ$. On a

$$A = aP + bQ \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a+b & -a+b & -a+b \\ -a+b & 2a+b & -a+b \\ -a+b & -a+b & 2a+b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a+b = -3 \\ -a+b = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -3 \\ b = 3. \end{cases}$$

Ainsi, $A = -3P + 3Q$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : A^n = a^n P + b^n Q$.

- **Initialisation.** On a $A^0 = I_3 = P + Q = a^0 P + b^0 Q$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Alors

$$A^{n+1} = A^n A = (a^n P + b^n Q)(aP + bQ) = a^{n+1} P^2 + a^n b PQ + ab^n QP + b^{n+1} Q^2 = a^{n+1} P + b^{n+1} Q,$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{Comme } a = -3 \text{ et } b = 3, \text{ on obtient } A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-3)^n + 3^n & 3^n - (-3)^n & 3^n - (-3)^n \\ 3^n - (-3)^n & 2(-3)^n + 3^n & 3^n - (-3)^n \\ 3^n - (-3)^n & 3^n - (-3)^n & 2(-3)^n + 3^n \end{pmatrix}.$$

9 Commutant

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Corrigé

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} MA = AM &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2a & -a-2b \\ 2c & -c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ -2c & -2d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} c = 0, \\ d = a+4b. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+4b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

10 Commutant

- Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec : $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$.
- En déduire les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $X^2 = B$.

Corrigé

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a

$$MB = BM \iff \begin{pmatrix} a & 4b & 16c \\ d & 4e & 16f \\ g & 4h & 16i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4d & 4e & 4f \\ 16g & 16h & 16i \end{pmatrix} \iff b = c = d = f = g = h = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{C}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid (a, e, i) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

- Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = B$. On a $XB = XX^2 = X^3 = X^2X = BX$. Ainsi, X commute avec B et, d'après la question précédente, X est diagonale.

$$\text{On pose donc } X = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}. \text{ Alors } X^2 = B \iff \begin{cases} x^2 = 1, \\ y^2 = 4, \\ z^2 = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \{-1, 1\}, \\ y \in \{-2, 2\}, \\ z \in \{-4, 4\}. \end{cases}$$

$$\text{Les solutions sont donc les huit matrices } \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\varepsilon_3 \end{pmatrix} \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3 \right\}.$$

11 Commutant

Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .

- Calculer le produit $P^t P$. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1} .
- Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ et vérifier que D est diagonale. En déduire une expression de A en fonction de D , P et P^{-1} .
- En déduire par une récurrence l'expression de A^n en fonction de P , P^{-1} , D et n . Donner alors l'expression matricielle (sous forme d'un seul tableau de nombres) de A^3 .
- Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $DN = ND$, où N est une nouvelle matrice dont on donnera l'expression en fonction de M .
- Expliciter l'ensemble $\mathcal{C}(D)$ des matrices qui commutent avec D , i.e. $\mathcal{C}(D) = \{C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), DC = CD\}$.
- En déduire une expression explicite de $\mathcal{C}(A)$.

Corrigé

1. On obtient $P^t P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_4$. Ainsi, $P \left(\frac{1}{2} {}^t P \right) = I_4$, donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2} {}^t P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On obtient $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice D est donc diagonale. Comme $D = P^{-1}AP$, on a $A = PDP^{-1}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation.** On a $A^0 = I_4 = PI_4P^{-1} = PD^0P^{-1}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$.
Alors $A^{n+1} = A^n A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Pour $n = 3$, on obtient $A^3 = PD^3P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On a

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff MA = AM \iff MPDP^{-1} = PDP^{-1}M \iff P^{-1}MPD = DP^{-1}MP.$$

En posant $N = P^{-1}MP$, on obtient donc $M \in \mathcal{C}(A) \iff ND = DN$.

5. Soit $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

6. Soit $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On a

$$DC = CD \iff \begin{pmatrix} -2c_{11} & -2c_{12} & -2c_{13} & -2c_{14} \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & -c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 2c_{41} & 2c_{42} & 2c_{43} & 2c_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_{11} & -c_{12} & c_{13} & 2c_{14} \\ -2c_{21} & -c_{22} & c_{23} & 2c_{24} \\ -2c_{31} & -c_{32} & c_{33} & 2c_{34} \\ -2c_{41} & -c_{42} & c_{43} & 2c_{44} \end{pmatrix}.$$

On voit que $DC = CD$ impose que tous les coefficients non diagonaux de C soient nuls. Ainsi,

$$\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

7. D'après les questions précédentes,

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D) \iff \exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4, \quad M = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{Or, } P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \delta & 0 & 0 & -\alpha + \delta \\ 0 & \beta + \gamma & -\beta + \gamma & 0 \\ 0 & -\beta + \gamma & \beta + \gamma & 0 \\ -\alpha + \delta & 0 & 0 & \alpha + \delta \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

12 Application du cours

Soit A une matrice symétrique et inversible. Montrer que A^{-1} est symétrique.

Corrigé

D'après le cours, ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = (A)^{-1}$ par symétrie de A . Donc, A^{-1} est symétrique.

13 Polynôme de matrice

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 - 3A^2 + 5A = 0_n$. Déterminer A^{-1} en fonction de A .

Corrigé

On a, en multipliant par A^{-1} l'égalité de l'énoncé, que

$$A^2 - 3A + 5I_n = 0 \iff A(A - 3I_n) = -5I_n \iff A \left(\frac{1}{5}(3I_n - A) \right) = I_n.$$

$$\text{Donc, } A^{-1} = \frac{1}{5}(3I_n - A).$$

14 Polynôme de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^4 + 4A^3 + A^2 - A + I_n = 0_n$, $A^5 + A^6 = 0_n$. Montrer que $A = -I_n$.

Corrigé

La première égalité donne $A(A^3 + 4A^2 + A - I_n) = -I_n \iff A(-A^3 - 4A^2 - A + I_n) = I_n$

Ainsi, A est inversible (et $A^{-1} = (-A^3 - 4A^2 - A + I_n)$).

Par ailleurs, $A^5 + A^6 = A^5(I_n + A) = 0_n$. Comme A^5 est inversible, on en déduit que $I_n + A = 0_n$, donc $A = -I_n$.

15 Matrice nilpotente ; factorisation matricielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent.

1. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A et B^p commutent.
2. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, A^q et B^p commutent.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A^m - B^m = (A - B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$.
4. Soit N une matrice telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^m = 0_n$. Montrer que $I_n + N$ est inversible et déterminer son inverse.

Corrigé

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $P(p) : AB^p = B^p A$.
 - **Initialisation.** On a $AB^0 = AI_n = A = I_n A = B^0 A$, donc $P(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $P(p)$. Alors $AB^{p+1} = AB^p B = B^p AB = B^p BA = B^{p+1} A$, donc $P(p+1)$ est vraie.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on pose $Q(q) : A^q B^p = B^p A^q$.
 - **Initialisation.** On a $A^0 B^p = B^p = B^p A^0$, donc $Q(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $Q(q)$. D'après la question précédente, A et B^p commutent. Ainsi, $A^{q+1} B^p = A(A^q B^p) = AB^p A^q = B^p A^{q+1}$, donc $Q(q+1)$ est vraie.
3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, les puissances de A et de B commutent. Ainsi,

$$\begin{aligned} (A - B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k} &= \sum_{k=0}^{m-1} A^{k+1} B^{m-1-k} - \sum_{k=0}^{m-1} B A^k B^{m-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} A^{k+1} B^{m-1-k} - \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-k} = A^m - B^m. \end{aligned}$$

4. Posons $S = I_n - N + N^2 - \dots + (-1)^{m-1} N^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k N^k$.

La matrice S étant un polynôme en N , elle commute avec N , donc avec $I_n + N$. De plus,

$$(I_n + N)S = (I_n + N)(I_n - N + N^2 - \dots + (-1)^{m-1} N^{m-1}) = I_n + (-1)^{m-1} N^m = I_n.$$

Ainsi, $I_n + N$ est inversible et $(I_n + N)^{-1} = I_n - N + N^2 - \dots + (-1)^{m-1} N^{m-1}$.

16 Etude de suite

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$.
2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, v_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - v_n, \quad v_{n+1} = 3v_n. \end{cases}$$

- (a) Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$.
- (b) En déduire une expression explicite de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de u_0 et v_0 .

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

• **Initialisation.** On a $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 - 3^0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix}$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Alors

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n + 3(2^n - 3^n) \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 3^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix},$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - v_n \\ 3v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Ainsi, on trouve $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) En itérant la relation précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n u_0 + (2^n - 3^n)v_0$ et $v_n = 3^n v_0$.

17 Type concours

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - A$.
- En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I_2 .
- Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
- Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.
- Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
- En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n . L'expression trouvée est-elle encore valable pour $n = -1$?

On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2}, & u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3 \end{cases}$$

- Calculer u_2 et u_3 .
- Écrire une fonction **Python** prenant en argument un entier naturel n et renvoyant en sortie la valeur de u_n .

On pose $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

- (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_{n+1} = AX_n + B$.

(b) Résoudre l'équation $AY + B = Y$, d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On notera L la matrice solution obtenue.

(c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $X_n = A^n(X_0 - L) + L$

10. Dédurre des questions précédentes que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{3}{10}(3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}$

Corrigé

1. On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2$.

2. D'après la question précédente, $A(A - I_2) = 6I_2$. Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{6}(A - I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

3. Matrice 2×2 ? On pense au déterminant. On a $\det(P) = 3 \times 1 - (-2) \times 1 = 5 \neq 0$. Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. On obtient

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation.** On a $A^0 = I_2 = PI_2P^{-1} = PD^0P^{-1}$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, donc $P(n+1)$ est vraie.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + 2(-2)^n & 6(3^n - (-2)^n) \\ 3^n - (-2)^n & 2 \cdot 3^n + 3(-2)^n \end{pmatrix}.$$

Cette expression reste valable pour $n = -1$. Elle donne alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

7. On a $u_2 = u_1 + 6u_0 + 3 = 1 - 3 + 3 = 1$, puis $u_3 = u_2 + 6u_1 + 3 = 1 + 6 + 3 = 10$.

8. On peut écrire la fonction suivante :

```
1 def suite_u(n):
2     u0 = -1/2
3     u1 = 1
4     for k in range(n):
5         c=u1
6         u1=u1+6*u0+3
7         u0=c
8     return u0
```

9. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $AX_n + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + 6u_n + 3 \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

(b) Soit $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a

$$AY + B = Y \iff \begin{pmatrix} x + 6y + 3 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 6y + 3 = 0, \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, $L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : X_n = A^n(X_0 - L) + L$.

- **Initialisation.** On a $A^0(X_0 - L) + L = X_0 - L + L = X_0$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Alors

$$X_{n+1} = AX_n + B = A(A^n(X_0 - L) + L) + B = A^{n+1}(X_0 - L) + AL + B = A^{n+1}(X_0 - L) + L,$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

10. On a $X_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, donc $X_0 - L = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n(X_0 - L) + L = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + 2(-2)^n & 6(3^n - (-2)^n) \\ 3^n - (-2)^n & 2 \cdot 3^n + 3(-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La deuxième ligne nous donne $u_n = \frac{3}{10}(3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}$.

18 Type concours

Pour tout réel a , on définit la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

- Déterminer la ou les valeurs de c pour lesquelles $M(c) = I_2$.
- Démontrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $M(a)M(b) = M(a+b-2ab)$.
- On suppose $a \neq \frac{1}{2}$. Montrer alors que la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer en fonction de a le réel b tel que $M(b) = M(a)^{-1}$.
La matrice $M(1/2)$ est-elle inversible ?
- Déterminer l'unique réel non nul a_0 tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$.
- On considère maintenant les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_2 - P$.
 - Calculer P^2, PQ, QP et Q^2 . (On donnera les résultats en fonction des matrices P et Q ou de la matrice nulle.)
 - Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le réel α tel que $M(a) = P + \alpha Q$.
 - En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $(M(a))^n$ en fonction de P, Q, α et n .
 - Expliciter la matrice $(M(a))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé

- On a $M(c) = I_2 \iff \begin{pmatrix} 1-c & c \\ c & 1-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff c = 0$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a $M(a)M(b) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-b & b \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a-b+2ab & a+b-2ab \\ a+b-2ab & 1-a-b+2ab \end{pmatrix} = M(a+b-2ab)$.

3. Supposons que $a \neq \frac{1}{2}$. Cherchons $b \in \mathbb{R}$ tel que $M(a)M(b) = I_2$. D'après les questions précédentes,

$$M(a)M(b) = I_2 \iff M(a+b-2ab) = M(0) \iff a+b-2ab=0 \iff b(1-2a)=-a \iff b = \frac{a}{2a-1}.$$

Ainsi, $M(a)$ est inversible et $M(a)^{-1} = M\left(\frac{a}{2a-1}\right)$.

Par ailleurs, $M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ses deux lignes étant égales, elle n'est pas inversible. On pourrait aussi dire que son déterminant vaut 0.

4. D'après la question 2, $M(a)^2 = M(2a-2a^2)$. Ainsi,

$$M(a)^2 = M(a) \iff 2a-2a^2 = a \iff a(1-2a) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } a = \frac{1}{2}.$$

L'unique réel non nul recherché est donc $a_0 = \frac{1}{2}$.

5. On a $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) On obtient directement $P^2 = P$, $PQ = QP = 0_2$ et $Q^2 = Q$.

(b) Cherchons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M(a) = P + \alpha Q$. On a

$$M(a) = P + \alpha Q \iff \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} \iff \alpha = 1-2a.$$

(c) Pour $n = 0$, on a $M(a)^0 = I_2 = P + Q$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: $M(a)^n = P + \alpha^n Q$.

- **Initialisation.** On a $M(a) = P + \alpha Q$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors

$$M(a)^{n+1} = (P + \alpha^n Q)(P + \alpha Q) = P^2 + \alpha P Q + \alpha^n Q P + \alpha^{n+1} Q^2 = P + \alpha^{n+1} Q,$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

(d) Pour $n = 0$, $M(a)^0 = I_2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\alpha = 1-2a$, on obtient $M(a)^n = P + (1-2a)^n Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (1-2a)^n & 1 - (1-2a)^n \\ 1 - (1-2a)^n & 1 + (1-2a)^n \end{pmatrix}$.

19 Type concours

Considérons $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Déterminer les réels λ de sorte que la matrice $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.
- Résoudre l'équation $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
- Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner sa matrice inverse.
- Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.
- Soient $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\Delta = P^{-1}MP$. Établir : $M^2 = A \iff \Delta^2 = D$
- (a) Soit Δ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$. Démontrer que Δ et D commutent et en déduire que Δ est une matrice diagonale.
(b) Résoudre finalement l'équation $\Delta^2 = D$, d'inconnue $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer toutes les solutions de l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 - 2\lambda & 3 \\ 3 & 5 - 2\lambda \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4} ((5 - 2\lambda)^2 - 9) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

Ainsi, $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, 4\}$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a $AX = X \iff \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + 3y = 0, \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \iff x = -y.$

Ainsi, les solutions sont les vecteurs $X = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. On a $\det(P) = 1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 \neq 0$. Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. On obtient $D = P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. On a $M^2 = A \iff P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \iff P^{-1}MPP^{-1}MP = D \iff \Delta^2 = D$.

6. (a) Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$. On s'inspire de la méthode de l'exercice 10.

On a $\Delta D = \Delta \Delta^2 = \Delta^3 = \Delta^2 \Delta = D \Delta$.

Posons $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $\Delta D = \begin{pmatrix} a & 4b \\ c & 4d \end{pmatrix}$ et $D\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$. Ainsi, $\Delta D = D\Delta$ implique $b = c = 0$. La matrice Δ est donc diagonale.

- (b) Posons $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. On a $\Delta^2 = D \iff \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x \in \{-1, 1\}, \\ y \in \{-2, 2\}. \end{cases}$

Les solutions sont donc $\Delta \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

7. Comme $\Delta = P^{-1}MP$, on a $M = P\Delta P^{-1}$. Pour $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, on obtient $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y & -x+y \\ -x+y & x+y \end{pmatrix}$.

En prenant $x \in \{-1, 1\}$ et $y \in \{-2, 2\}$, les solutions de l'équation $M^2 = A$ sont

$$\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}.$$