

Exercice 1 – Sur les sommes et produits

Corrigé

1. On reconnaît le terme général $\frac{e^k}{(n-k)!}$. Ainsi, $A_n = \sum_{k=0}^n \frac{e^k}{(n-k)!}$.
2. On a $S_n = \frac{3}{2n} \sum_{k=1}^n (-6)^k$. La somme est géométrique de raison -6 . Ainsi, $S_n = \frac{3}{2n} \times \frac{-6(1 - (-6)^n)}{1 + 6} = \frac{9}{7n} ((-6)^n - 1)$.
3. On a $\prod_{k=2}^n (5^{n+2} \times 3^{2k}) = (5^{n+2})^{n-1} \times 3^{2 \sum_{k=2}^n k}$. Or, $2 \sum_{k=2}^n k = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) = n(n+1) - 2 = (n-1)(n+2)$. Ainsi, $\prod_{k=2}^n (5^{n+2} \times 3^{2k}) = 5^{(n-1)(n+2)} 3^{(n-1)(n+2)} = 15^{(n-1)(n+2)}$.
4. Pour $j = 1$, la somme est vide et vaut donc 0. Pour $j \geq 2$, $D_n = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=2}^n j - 1 \stackrel{k=j-1}{=} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.
5. On initialise le produit à 1, puis on multiplie successivement par $k\pi$ pour k allant de 1 à n .

```
def Produit(n):  
    P = 1  
    for k in range(1,n+1):  
        P = P * k * np.pi  
    return P
```

Exercice 2 – Raisonnement

Corrigé

1. Distinguons trois cas.
 - Si $x \leq 1$, alors $|x-3| + |x-1| = 4 - 2x$. L'équation devient $4 - 2x = (x-2)^2 \iff x(x-2) = 0$. Comme $x \leq 1$, on obtient $x = 0$.
 - Si $1 \leq x \leq 3$, alors $|x-3| + |x-1| = 2$. L'équation devient $(x-2)^2 = 2$, d'où $x = 2 - \sqrt{2}$ ou $x = 2 + \sqrt{2}$. Aucune de ces deux solutions n'appartient à $[1, 3]$.
 - Si $x \geq 3$, alors $|x-3| + |x-1| = 2x - 4$. L'équation devient $2x - 4 = (x-2)^2 \iff x^2 - 6x + 8 = 0 \iff x = 2$ ou $x = 4$. Comme $x \geq 3$, on obtient $x = 4$.Ainsi, l'ensemble des solutions est $\boxed{\{0, 4\}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : \prod_{k=0}^n u_k = u_{n+1} - 2$.
 - **Initialisation.** On a $u_0 = 3$ et $u_1 = 5$, donc $\prod_{k=0}^0 u_k = u_0 = 3 = u_1 - 2$. Ainsi, $P(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors $\prod_{k=0}^{n+1} u_k = (u_{n+1} - 2)u_{n+1} = (2^{2^{n+1}} - 1)(2^{2^{n+1}} + 1)$.
Ainsi, $\prod_{k=0}^{n+1} u_k = 2^{2 \times 2^{n+1}} - 1 = 2^{2^{n+2}} - 1 = u_{n+2} - 2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
3. Procédons par récurrence forte. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : \ll u_n = 2^n \gg$.
 - **Initialisation.** On a $u_0 = 1 = 2^0$. Ainsi, $P(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(0), \dots, P(n)$ vraies. Alors $u_{n+1} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n 2^k 2^{n-k}$.
Ainsi, $u_{n+1} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n 2^n = \frac{2}{n+1} (n+1) 2^n = 2^{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Exercice 3 – Logique

Corrigé

1. La négation de $\mathcal{P}$ est $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{k=1}^n r_k = 0 \text{ et } \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, r_k \neq 0$.
2. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\neg \mathcal{P}$ est vraie. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$, des réels positifs $r_1, \dots, r_n$ et $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $\sum_{k=1}^n r_k = 0$ et $r_{k_0} \neq 0$. Comme $r_{k_0} \geq 0$, on a en fait $r_{k_0} > 0$. De plus, tous les r_k sont positifs. Ainsi, $\sum_{k=1}^n r_k \geq r_{k_0} > 0$, ce qui contredit $\sum_{k=1}^n r_k = 0$. Donc $\mathcal{P}$ est vraie.

Exercice 4 – Étude de suite

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n = \left(1 - \frac{n}{2}\right) 2^n$.
 - **Initialisation.** On a $u_0 = 1 = \left(1 - \frac{0}{2}\right) 2^0$ et $u_1 = 1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) 2^1$. Ainsi, $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 4u_n \\ \text{Par } P(n) &= 4 \left(1 - \frac{n+1}{2}\right) 2^{n+1} - 4 \left(1 - \frac{n}{2}\right) 2^n \\ &= \left(1 - \frac{n+2}{2}\right) 2^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.

2. `def CalculT(n):`

```
    S = 0
    for k in range(0,n+1):
        S += k*2**k
    return S
```

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = \left(1 - \frac{k+2}{2}\right) 2^{k+2} = -2k2^k$. Ainsi, $S_n = \sum_{k=0}^n u_{k+2} = -2 \sum_{k=0}^n k2^k = -2T_n$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = -\frac{1}{2}S_n$.
4. En utilisant la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (4u_{k+1} - 4u_k) \\ &= 4 \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) \\ &= 4(u_{n+1} - u_0) \\ &= 4u_{n+1} - 4. \end{aligned}$$

D'après la question 1, $u_{n+1} = \left(1 - \frac{n+1}{2}\right) 2^{n+1} = (1-n)2^n$. Ainsi, $S_n = (1-n)2^{n+2} - 4$.

5. D'après les questions 2 et 3, $T_n = -\frac{1}{2}((1-n)2^{n+2} - 4) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

```

6. def CalculS(n):
    S = 0
    u0=1
    u1=1
    for k in range(0,n+1):
        c=4*u1-4*u0
        u0=u1
        u1=c
        S+=u1
    return S

```

Corrigé

1. (a) L'équation a pour domaine de validité $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Si $x \in D$, on a

$$\frac{6+x}{2+x} = x \iff 6+x = x(2+x) \iff x^2 + x - 6 = 0.$$

Or le polynôme $x^2 + x - 6$ a pour racines 2 et -3 , qui appartiennent bien à D . L'équation a donc pour solutions 2 et -3 .

- (b) Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite est constante, on a $u_{n+1} = u_n$. Autrement dit, on a

$$u_n = \frac{6+u_n}{2+u_n}.$$

Par conséquent, u_n est solution de l'équation de la question précédente. Nous savons donc que soit $u_n = 2$, soit $u_n = -3$.

Comme la suite est constante, tous ses termes sont égaux. D'après ce qui précède, soit ils sont tous égaux à 2, soit ils sont tous égaux à -3 , ce qui conclut.

```

def Suite(x,n):
    u=x
    for k in range(n):
        u=(6+u)/(2+u)
    return u

```

2. Nous allons raisonner par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \neq 2$ ".

- *Initialisation.* Comme on a supposé $u_0 \neq 2$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{P}(n+1)$ est fausse, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2$. On a alors

$$\frac{6+u_n}{2+u_n} = 2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 6+u_n = 2(2+u_n), \quad \text{donc} \quad u_n = 2.$$

Il y a contradiction avec $\mathcal{P}(n)$, donc on a bien montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 3}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{6+u_n}{2+u_n} + 3}{\frac{6+u_n}{2+u_n} - 2} = \frac{6+u_n + 3(2+u_n)}{6+u_n - 2(2+u_n)} = \frac{4u_n + 12}{-u_n + 2} = -4 \frac{u_n + 3}{u_n - 2} = -4v_n.$$

On a finalement bien montré que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -4 .

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n = (-4)^n v_0 = (-4)^n \frac{u_0 + 3}{u_0 - 2}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n(u_n - 2) = u_n + 3$, on déduit que $u_n(v_n - 1) = 2v_n + 3$. On remarque que $v_n - 1 \neq 0$: sinon on aurait $u_n + 3 = u_n - 2$, ce qui est impossible. Finalement,

$$u_n = \frac{2v_n + 3}{v_n - 1} = \frac{2(-4)^n \frac{u_0 + 3}{u_0 - 2} + 3}{(-4)^n \frac{u_0 + 3}{u_0 - 2} - 1} = \frac{2(-4)^n(u_0 + 3) + 3(u_0 - 2)}{(-4)^n(u_0 + 3) - (u_0 - 2)}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en divisant le numérateur et le dénominateur par $(-4)^n$ dans la fraction précédente que

$$u_n = \frac{2(u_0 + 3) + \frac{3}{(-4)^n}(u_0 - 2)}{u_0 + 3 - \frac{1}{(-4)^n}(u_0 - 2)}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} |(-4)^n| = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{(-4)^n} = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(-4)^n} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2(u_0 + 3)}{u_0 + 3} = 2.$$

Problème

I. Étude d'une fonction.

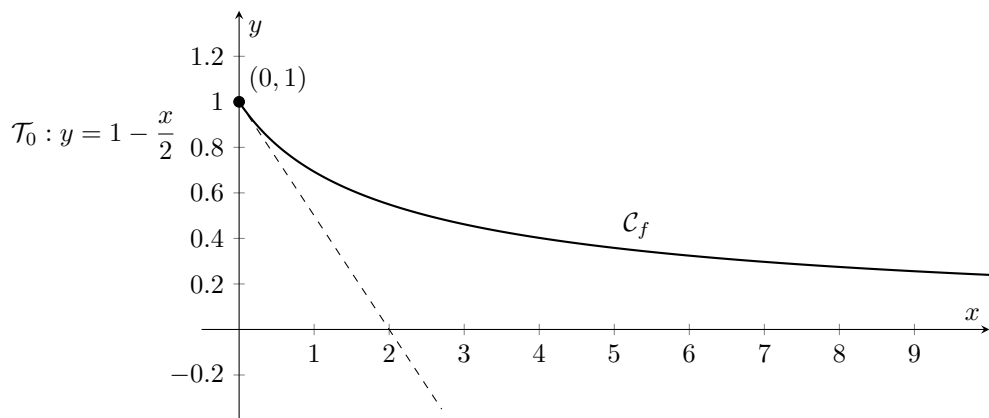
Corrigé

1. (a) La fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $] -1, +\infty[$. Elle est dérivable sur cet intervalle et, pour tout $x > -1$, $h'(x) = \frac{1}{1+x}$. Ainsi, $h'(0) = 1$.
 (b) Par définition de la dérivée de h en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = h'(0) = 1$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Comme $f(0) = 1$, la fonction f est continue en 0.
2. (a) Soit $t \geq 0$. Comme $1+t \geq 1$, on a $\frac{1}{1+t} \leq 1$. De plus, $1+t > 0$ et $1-t \leq \frac{1}{1+t} \iff (1-t)(1+t) \leq 1 \iff 1-t^2 \leq 1$, ce qui est vrai. Ainsi, $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.
 (b) Soit $x \geq 0$. En intégrant l'encadrement précédent sur $[0, x]$, on obtient $\int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x 1 dt$. Ainsi, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
 (c) En posant $i(x) := \ln(1+x) - x$, on a $i'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$ lorsque $x > 0$. Donc, i est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et, pour $x > 0$, $i(x) < i(0) = 0$. Donc, $\ln(1+x) < x$.
3. (a) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}.$$

Ainsi, $g'(x) \geq 0$. De plus, $(1+x)(2+x)^2 \geq 4$, donc $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$.

- (b) On a $g(0) = 0$. En intégrant l'encadrement précédent sur $[0, x]$, pour $x \geq 0$, on obtient $0 \leq g(x) - g(0) \leq \int_0^x \frac{t^2}{4} dt$. Ainsi, $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$.
4. Pour tout $x > 0$, la fonction f est dérivable et $f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$. D'après la question précédente, $g(x) \geq 0$, donc $\ln(1+x) \geq \frac{2x}{2+x}$. Or, pour tout $x > 0$, $\frac{2x}{2+x} - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{(2+x)(1+x)} > 0$. Ainsi, $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$, donc $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc sur f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ par continuité. (cf le cours : un seul point d'annulation de la dérivée donne la stricte monotonie).
5. (a) En posant $X = 1+x$, on a $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(X)}{X} \times \frac{X}{X-1}$. Par croissance comparée, $\frac{\ln(X)}{X} \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow +\infty$, tandis que $\frac{X}{X-1} \rightarrow 1$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 (b) D'après la question 3, $0 \leq \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x} \leq \frac{x^3}{12}$. Ainsi, $\frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{2x}{2+x} + \frac{x^3}{12}$. En soustrayant à x , on obtient $\frac{x^2}{2+x} - \frac{x^3}{12} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2+x}$. Pour $x > 0$, on peut diviser par x^2 : $\frac{1}{2+x} - \frac{x}{12} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2+x}$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
 (c) On a $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$. D'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$. L'équation de la tangente en 0 est donc $y = 1 - \frac{x}{2}$.
 (d) La fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, avec $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. De plus, d'après la question 2, $1 - \frac{x}{2} \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x > 0$. La courbe est donc située au-dessus de sa tangente en 0 et admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.



II. Une étude de suite.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « u_n est bien défini et $0 < u_n \leq 1$ ».

• **Initialisation.** On a $u_0 = 1$. Ainsi, $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors $u_n > 0$, donc $1 + u_n > 1$: le réel $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ est donc bien défini et strictement positif. De plus, d'après la partie I, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \leq u_n \leq 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, la suite est bien définie et $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, pour tout $x > 0$, on a $\ln(1 + x) \leq x$ par la question 2.(b). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers un réel $\ell \geq 0$.

Par les résultats admis, on a $u_{n+1} \rightarrow \ell$, donc, par continuité de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ sur $[0, +\infty[$, $\ell = \ln(1 + \ell)$. Si $\ell > 0$, alors $\ln(1 + \ell) < \ell$ par la question 2.(c), ce qui est impossible. Ainsi, $\ell = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\ln(1 + u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1 + u_n)}{u_n \ln(1 + u_n)}$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - \ln(1 + u_n)}{u_n^2} \times \frac{u_n}{\ln(1 + u_n)}$. D'après la partie I et puisque $u_n \rightarrow 0$, $\frac{u_n - \ln(1 + u_n)}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ et $\frac{u_n}{\ln(1 + u_n)} \rightarrow 1$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

3. **Méthode 1.** Soit $x \in]0, 1]$. On a

$$\frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1 + x)}{x \ln(1 + x)} = \frac{1}{2} - \frac{(x + 2)g(x)}{2x \ln(1 + x)}.$$

Comme $g(x) \geq 0$, on obtient immédiatement $\frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$. D'autre part, d'après la partie I,

$$g(x) \leq \frac{x^3}{12} \quad \text{et} \quad \ln(1 + x) \geq \frac{2x}{x + 2}. \text{ Ainsi, } 0 \leq \frac{(x + 2)g(x)}{2x \ln(1 + x)} \leq \frac{x(x + 2)^2}{48}.$$

$$\text{Or } 0 < x \leq 1, \text{ donc } (x + 2)^2 \leq 9. \text{ Ainsi, } \frac{(x + 2)g(x)}{2x \ln(1 + x)} \leq \frac{3x}{16}. \text{ On en déduit } \frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}.$$

Méthode 2. On remarque que

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \iff x \ln(1 + x) - \frac{3}{8}x^2 \ln(1 + x) \leq 2x - 2 \ln(1 + x) \leq x \ln(1 + x).$$

On pose donc $a(x) = x \ln(1 + x) - 2x + 2 \ln(1 + x)$. En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} a'(x) &= \frac{x + (1 + x) \ln(1 + x) - 2(1 + x) + 2}{1 + x} = \frac{-x + (1 + x) \ln(1 + x)}{1 + x} \stackrel{3.(b)}{\geq} \frac{-x(2 + x) + 2x(1 + x)}{(2 + x)(1 + x)} \\ &= \frac{x^2}{(2 + x)(1 + x)} \geq 0 \end{aligned}$$

. La fonction a est donc croissante. De plus, $a(0) = 0$. Donc, par croissance de a , on a, pour $x \in [0, 1]$,

$$a(x) \geq 0, \text{ d'où } \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}.$$

Pour l'autre inégalité, on pose $b(x) = 2x - 2 \ln(1 + x) - x \ln(1 + x) + \frac{3}{8}x^2 \ln(1 + x)$.

La fonction b est deux fois dérivable sur $[0, 1]$. Après calcul,

$$\begin{aligned} b'(x) &= \frac{16(1+x) - 16 - 8x - 8(1+x)\ln(1+x) + 6x(1+x)\ln(1+x) + 3x^2}{8(1+x)} \\ &= \frac{8x - 8\ln(1+x) - 2x\ln(1+x) + 6x^2\ln(1+x) + 3x^2}{8(1+x)}. \end{aligned}$$

. En utilisant la question 2.(b) qui donne que $\ln(1+x) \leq x$, on obtient que

$$8x - 8\ln(1+x) - 2x\ln(1+x) + 6x^2\ln(1+x) + 3x^2 \geq 8x - 8x - 2x^2 + 3x^2 + 0 = x^2 \geq 0.$$

Donc, $b'(x) \geq 0$. Donc, b est croissante, et puisque $b(0) = 0$, on trouve que $b(x) \geq 0$ pour $x \in [0, 1]$.

4. Comme $0 < u_n \leq 1$, on peut appliquer la question précédente à $x = u_n$. On obtient $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2}$.

Comme $u_n \leq 1$, $v_{n+1} - v_n \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16} \geq \frac{1}{4}$. Ainsi, par télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \geq \frac{n}{4}$. Comme $v_0 = 1$, $v_n \geq \frac{n+4}{4}$. Les termes étant strictement positifs, en passant à l'inverse, $u_n \leq \frac{4}{n+4}$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \leq \frac{n}{2}$, donc $v_n \leq \frac{n+2}{2}$. En passant à l'inverse, $u_n \geq \frac{2}{n+2}$. Pour $n = 0$, l'encadrement est immédiat. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4}{n+4}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P(n) : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.

— **Initialisation** $1 \leq 2$, c'est OK

— **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1} + 2\sqrt{n}.$$

De plus, en utilisant la technique de la quantité conjuguée à la dernière équivalence

$$\frac{1}{n+1} + 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1} \iff \frac{1}{n+1} \leq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

ce qui est vrai puisque $\sqrt{n} \leq n$. D'où le résultat souhaité.

6. D'après une question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_k \leq v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$, on obtient $\frac{n}{2} - \frac{3}{16} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq v_n - v_0 \leq \frac{n}{2}$. Comme $v_0 = 1$, il vient

$$1 + \frac{n}{2} - \frac{3}{16} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq v_n \leq 1 + \frac{n}{2}.$$

D'autre part, d'après une question précédente, $u_k \leq \frac{4}{k+4}$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq 4 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+4} \leq 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 8\sqrt{n}$.

On obtient donc $1 + \frac{n}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{n} \leq v_n \leq 1 + \frac{n}{2}$.

En divisant par n , on obtient

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{n}} \leq \frac{v_n}{n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}.$$

Par passage à la limite et par le théorème des gendarmes, $\frac{1}{nu_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, soit $nu_n \rightarrow 2$.