

Exercice 1 – Sur les sommes et produits

Corrigé

1. On reconnaît le terme général $\frac{e^k}{(n-k)!}$. Ainsi, $A_n = \sum_{k=0}^n \frac{e^k}{(n-k)!}$.
2. On a $S_n = \frac{3}{2n} \sum_{k=1}^n (-6)^k$. La somme est géométrique de raison -6 . Ainsi, $S_n = \frac{3}{2n} \times \frac{-6(1 - (-6)^n)}{1 + 6} = \frac{9}{7n} ((-6)^n - 1)$.
3. On a $\prod_{k=2}^n (5^{n+2} \times 3^{2k}) = (5^{n+2})^{n-1} \times 3^{2 \sum_{k=2}^n k}$. Or, $2 \sum_{k=2}^n k = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) = n(n+1) - 2 = (n-1)(n+2)$. Ainsi, $\prod_{k=2}^n (5^{n+2} \times 3^{2k}) = 5^{(n-1)(n+2)} 3^{(n-1)(n+2)} = 15^{(n-1)(n+2)}$.
4. Pour $j = 1$, la somme est vide et vaut donc 0. Pour $j \geq 2$, $D_n = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=2}^n j - 1 = \sum_{k=j-1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.
5. On initialise le produit à 1, puis on multiplie successivement par $k\pi$ pour k allant de 1 à n .

```
def Produit(n):  
    P = 1  
    for k in range(1,n+1):  
        P = P * k * np.pi  
    return P
```

Corrigé EDHEC 2013 ECE

1. (a) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
Initialisation. On a $u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 \leq 1$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$. Alors $0 \leq u_n^2 \leq 1$, donc $1 \leq u_n^2 + 1 \leq 2$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2 + 1}{2} \leq 1$. Ainsi, $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2}$.
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.
(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 1]$.
La fonction $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite dans la relation $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$. On obtient $\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2}$.
Ainsi, $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell - 1)^2 = 0 \iff \ell = 1$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
2. (a) On peut écrire :

```
def u(n):  
    U = 0  
    for k in range(n):  
        U = (U**2 + 1)/2  
    return U
```

- (b) On utilise une boucle **while** qui calcule les termes de la suite tant que $1 - u_n \geq 10^{-3}$.

```
n = 0
U = 0
while 1 - U >= 10**(-3):
    U = (U**2 + 1)/2
    n = n + 1
print(n)
```

3. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k - v_{k+1} = (1 - u_k) - (1 - u_{k+1}) = u_{k+1} - u_k = \frac{(1 - u_k)^2}{2} = \frac{v_k^2}{2}.$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n = (1 - 0) - (1 - u_n) = u_n.$$

- (c) D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k^2 = 2(v_k - v_{k+1})$.

Ainsi, en utilisant un télescopage dans la seconde égalité,

$$\sum_{k=0}^n v_k^2 = 2 \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = 2(v_0 - v_{n+1}) = 2(1 - v_{n+1}) = 2(1 - (1 - u_{n+1})) = 2u_{n+1}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 1$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v_k^2 = 2$.

Corrigé EDHEC 2010 ECE

1. On a $u_0 = 1 + 1 = 2$, puis $u_1 = (1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$ et $u_2 = (1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{2^k} \geq 1$. Ainsi, $u_n \geq 2$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

Comme $u_n \geq 2 > 0$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

3. (a) On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1 + x)$.

Pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. Ainsi, f est décroissante sur $] -1, 0]$ puis croissante sur $[0, +\infty[$. Elle admet donc un minimum en 0.

Or $f(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x > -1$, $f(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\ln(1 + x) \leq x$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) = \ln \left(\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \right) = \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\text{Question 3.(a)} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$$

$$\text{Somme géométrique} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, $\ln(u_n) \leq 2 - \frac{1}{2^n} \leq 2$.

4. D'après la question précédente, $\ln(u_n) \leq 2$. La fonction exponentielle étant croissante, on obtient $u_n \leq e^2$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par e^2 . Elle converge donc vers un réel ℓ . Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq e^2$. En passant à la limite, $2 \leq \ell \leq e^2$.

Corrigé EM Lyon 2002

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$,

$$P'_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} = -1 + x - x^2 + \dots + x^{2n-1}.$$

On reconnaît une somme géométrique, donc $P'_n(x) = -\frac{1 - (-x)^{2n}}{1 + x} = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$.

2. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x + 1 > 0$. Ainsi, le signe de $P'_n(x)$ est celui de $x^{2n} - 1$.

On a donc $P'_n(x) < 0$ pour $x \in [0, 1[$, $P'_n(1) = 0$ et $P'_n(x) > 0$ pour $x > 1$.

De plus, $P_n(0) = 0$. (Bon, je vous écris la limite en l'infini, mais elle n'est pas nécessaire. En fait, puisque le terme de plus haut degré de P_n étant $\frac{x^{2n}}{2n}$ et que $2n$ est pair, et que $\frac{1}{2n} > 0$, il domine. Donc,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$P'_n(x)$	-	0	+
P_n	0	$P_n(1)$	$+\infty$

3. On voit sur le tableau de variation que $P_n(1) < P_n(0) = 0$.

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$,

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}.$$

Ainsi, en factorisant par x^{2n+1} ,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

- (b) En prenant $x = 2$, on obtient

$$P_{n+1}(2) - P_n(2) = 2^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{n+1} \right) = 2^{2n+1} \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0.$$

Ainsi, la suite $(P_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

$$\text{Or } P_1(2) = -2 + \frac{2^2}{2} = 0.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geq 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction P_n est continue sur $[1, 2]$ et y est strictement croissante. De plus, $P_n(1) < 0$ et $P_n(2) \geq 0$.

D'après le théorème de la bijection monotone, il existe donc un unique $x_n \in]1, 2]$ tel que $P_n(x_n) = 0$.

De plus, d'après la question 2, P_n est strictement croissante sur $[2, +\infty[$, et donc, pour $x > 2$, $P_n(x) > P_n(2) \geq 0$. Donc, il n'y a pas d'autres solutions dans $[1, +\infty[$ que celle trouvée précédemment.

Ainsi, $1 < x_n \leq 2$.

6. On peut écrire :

```
def P(n,x):
    S = 0
    for k in range(1,2*n+1):
        S = S + (-1)**k * x**k / k
    return S
```

II – Des intégrales

1. **Méthode 1 : Formule de Bernoulli et astuce.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$, $t^{2n} - 1 = (t^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}$.

Or $t \geq 1$, donc, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $t^{2k} \geq 1$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} \geq n$.

Comme $t^2 - 1 \geq 0$, on en déduit $t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

2. **Méthode 2 : technique usuelle.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = t^{2n} - 1 - n(t^2 - 1)$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, f est dérivable comme différence de fonctions usuelles, et

$$f'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt(t^{2n-2} - 1).$$

Or $t \geq 1$, donc $t^{2n-2} \geq 1$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$.

La fonction f est donc croissante sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $f(t) \geq f(1) = 0$.

Ainsi, $t^{2n} - 1 - n(t^2 - 1) \geq 0, \iff t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

3. Pour tout $t \in [1, x]$, d'après la question précédente,

$$\frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq n \frac{t^2 - 1}{t + 1} = n(t - 1).$$

En intégrant cette inégalité entre 1 et x , on obtient

$$\int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq n \int_1^x (t - 1) dt = \frac{n}{2}(x - 1)^2.$$

Problème

I. Étude d'une fonction.

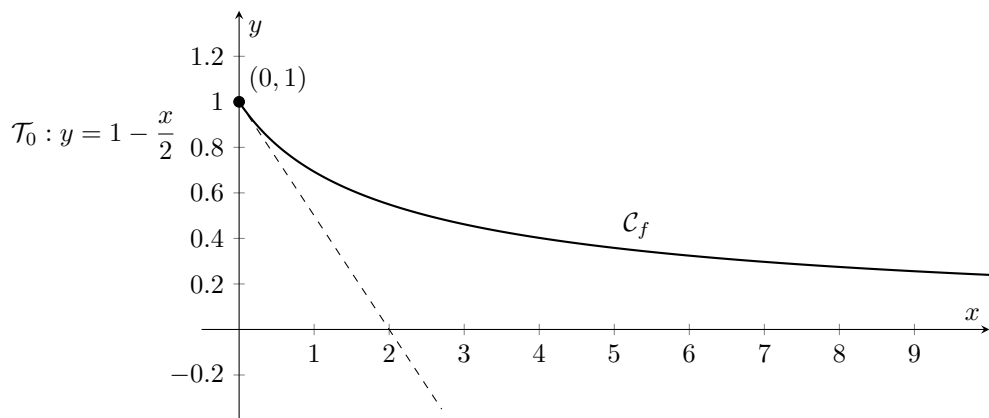
Corrigé

1. (a) La fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $] -1, +\infty[$. Elle est dérivable sur cet intervalle et, pour tout $x > -1$, $h'(x) = \frac{1}{1+x}$. Ainsi, $h'(0) = 1$.
(b) Par définition de la dérivée de h en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = h'(0) = 1$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Comme $f(0) = 1$, la fonction f est continue en 0.
2. (a) Soit $t \geq 0$. Comme $1+t \geq 1$, on a $\frac{1}{1+t} \leq 1$. De plus, $1+t > 0$ et $1-t \leq \frac{1}{1+t} \iff (1-t)(1+t) \leq 1 \iff 1-t^2 \leq 1$, ce qui est vrai. Ainsi, $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.
(b) Soit $x \geq 0$. En intégrant l'encadrement précédent sur $[0, x]$, on obtient $\int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x 1 dt$. Ainsi, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
(c) En posant $i(x) := \ln(1+x) - x$, on a $i'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$ lorsque $x > 0$. Donc, i est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et, pour $x > 0$, $i(x) < i(0) = 0$. Donc, $\ln(1+x) < x$.
3. (a) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}.$$

Ainsi, $g'(x) \geq 0$. De plus, $(1+x)(2+x)^2 \geq 4$, donc $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$.

- (b) On a $g(0) = 0$. En intégrant l'encadrement précédent sur $[0, x]$, pour $x \geq 0$, on obtient $0 \leq g(x) - g(0) \leq \int_0^x \frac{t^2}{4} dt$. Ainsi, $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$.
4. Pour tout $x > 0$, la fonction f est dérivable et $f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$. D'après la question précédente, $g(x) \geq 0$, donc $\ln(1+x) \geq \frac{2x}{2+x}$. Or, pour tout $x > 0$, $\frac{2x}{2+x} - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{(2+x)(1+x)} > 0$. Ainsi, $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$, donc $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc sur f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ par continuité. (cf le cours : un seul point d'annulation de la dérivée donne la stricte monotonie).
5. (a) En posant $X = 1+x$, on a $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(X)}{X} \times \frac{X}{X-1}$. Par croissance comparée, $\frac{\ln(X)}{X} \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow +\infty$, tandis que $\frac{X}{X-1} \rightarrow 1$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
(b) D'après la question 3, $0 \leq \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x} \leq \frac{x^3}{12}$. Ainsi, $\frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{2x}{2+x} + \frac{x^3}{12}$. En soustrayant à x , on obtient $\frac{x^2}{2+x} - \frac{x^3}{12} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2+x}$. Pour $x > 0$, on peut diviser par x^2 : $\frac{1}{2+x} - \frac{x}{12} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2+x}$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
(c) On a $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$. D'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$. L'équation de la tangente en 0 est donc $y = 1 - \frac{x}{2}$.
(d) La fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, avec $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. De plus, d'après la question 2, $1 - \frac{x}{2} \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x > 0$. La courbe est donc située au-dessus de sa tangente en 0 et admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.



II. Une étude de suite.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « u_n est bien défini et $0 < u_n \leq 1$ ».

• **Initialisation.** On a $u_0 = 1$. Ainsi, $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors $u_n > 0$, donc $1 + u_n > 1$: le réel $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ est donc bien défini et strictement positif. De plus, d'après la partie I, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \leq u_n \leq 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, la suite est bien définie et $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, pour tout $x > 0$, on a $\ln(1 + x) \leq x$ par la question 2.(b). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers un réel $\ell \geq 0$.

Par les résultats admis, on a $u_{n+1} \rightarrow \ell$, donc, par continuité de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ sur $[0, +\infty[$, $\ell = \ln(1 + \ell)$. Si $\ell > 0$, alors $\ln(1 + \ell) < \ell$ par la question 2.(c), ce qui est impossible. Ainsi, $\ell = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\ln(1 + u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1 + u_n)}{u_n \ln(1 + u_n)}$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - \ln(1 + u_n)}{u_n^2} \times \frac{u_n}{\ln(1 + u_n)}$. D'après la partie I et puisque $u_n \rightarrow 0$, $\frac{u_n - \ln(1 + u_n)}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ et $\frac{u_n}{\ln(1 + u_n)} \rightarrow 1$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

3. **Méthode 1.** Soit $x \in]0, 1]$. On a

$$\frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1 + x)}{x \ln(1 + x)} = \frac{1}{2} - \frac{(x + 2)g(x)}{2x \ln(1 + x)}.$$

Comme $g(x) \geq 0$, on obtient immédiatement $\frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$. D'autre part, d'après la partie I,

$$g(x) \leq \frac{x^3}{12} \quad \text{et} \quad \ln(1 + x) \geq \frac{2x}{x + 2}. \text{ Ainsi, } 0 \leq \frac{(x + 2)g(x)}{2x \ln(1 + x)} \leq \frac{x(x + 2)^2}{48}.$$

Or $0 < x \leq 1$, donc $(x + 2)^2 \leq 9$. Ainsi, $\frac{(x + 2)g(x)}{2x \ln(1 + x)} \leq \frac{3x}{16}$. On en déduit $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

Méthode 2. On remarque que

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \iff x \ln(1 + x) - \frac{3}{8}x^2 \ln(1 + x) \leq 2x - 2 \ln(1 + x) \leq x \ln(1 + x).$$

On pose donc $a(x) = x \ln(1 + x) - 2x + 2 \ln(1 + x)$. En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} a'(x) &= \frac{x + (1 + x) \ln(1 + x) - 2(1 + x) + 2}{1 + x} = \frac{-x + (1 + x) \ln(1 + x)}{1 + x} \stackrel{3.(b)}{\geq} \frac{-x(2 + x) + 2x(1 + x)}{(2 + x)(1 + x)} \\ &= \frac{x^2}{(2 + x)(1 + x)} \geq 0 \end{aligned}$$

. La fonction a est donc croissante. De plus, $a(0) = 0$. Donc, par croissance de a , on a, pour $x \in [0, 1]$,

$$a(x) \geq 0, \text{ d'où } \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}.$$

Pour l'autre inégalité, on pose $b(x) = 2x - 2 \ln(1 + x) - x \ln(1 + x) + \frac{3}{8}x^2 \ln(1 + x)$.

La fonction b est deux fois dérivable sur $[0, 1]$. Après calcul,

$$\begin{aligned} b'(x) &= \frac{16(1+x) - 16 - 8x - 8(1+x)\ln(1+x) + 6x(1+x)\ln(1+x) + 3x^2}{8(1+x)} \\ &= \frac{8x - 8\ln(1+x) - 2x\ln(1+x) + 6x^2\ln(1+x) + 3x^2}{8(1+x)}. \end{aligned}$$

. En utilisant la question 2.(b) qui donne que $\ln(1+x) \leq x$, on obtient que

$$8x - 8\ln(1+x) - 2x\ln(1+x) + 6x^2\ln(1+x) + 3x^2 \geq 8x - 8x - 2x^2 + 3x^2 + 0 = x^2 \geq 0.$$

Donc, $b'(x) \geq 0$. Donc, b est croissante, et puisque $b(0) = 0$, on trouve que $b(x) \geq 0$ pour $x \in [0, 1]$.

4. Comme $0 < u_n \leq 1$, on peut appliquer la question précédente à $x = u_n$. On obtient $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2}$.

Comme $u_n \leq 1$, $v_{n+1} - v_n \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16} \geq \frac{1}{4}$. Ainsi, par télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \geq \frac{n}{4}$. Comme $v_0 = 1$, $v_n \geq \frac{n+4}{4}$. Les termes étant strictement positifs, en passant à l'inverse, $u_n \leq \frac{4}{n+4}$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \leq \frac{n}{2}$, donc $v_n \leq \frac{n+2}{2}$. En passant à l'inverse, $u_n \geq \frac{2}{n+2}$. Pour $n = 0$, l'encadrement est immédiat. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4}{n+4}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P(n) : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.

— **Initialisation** $1 \leq 2$, c'est OK

— **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1} + 2\sqrt{n}.$$

De plus, en utilisant la technique de la quantité conjuguée à la dernière équivalence

$$\frac{1}{n+1} + 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1} \iff \frac{1}{n+1} \leq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

ce qui est vrai puisque $\sqrt{n} \leq n$. D'où le résultat souhaité.

6. D'après une question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_k \leq v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$, on obtient $\frac{n}{2} - \frac{3}{16} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq v_n - v_0 \leq \frac{n}{2}$. Comme $v_0 = 1$, il vient

$$1 + \frac{n}{2} - \frac{3}{16} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq v_n \leq 1 + \frac{n}{2}.$$

D'autre part, d'après une question précédente, $u_k \leq \frac{4}{k+4}$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq 4 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+4} \leq 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 8\sqrt{n}$.

On obtient donc $1 + \frac{n}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{n} \leq v_n \leq 1 + \frac{n}{2}$.

En divisant par n , on obtient

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{n}} \leq \frac{v_n}{n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}.$$

Par passage à la limite et par le théorème des gendarmes, $\frac{1}{nu_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, soit $nu_n \rightarrow 2$.