
Sujet 1

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

Attention : le sujet n'est pas conçu pour être terminé intégralement. L'objectif est notamment d'évaluer votre capacité à aborder des questions de difficultés variées.

Commencez par lire l'ensemble du sujet et traitez en priorité les questions sur lesquelles vous vous sentez le plus à l'aise. Si vous restez bloqué plus de cinq minutes sur une question, il est conseillé de passer à la suivante.

Vous pouvez admettre un résultat que vous n'avez pas réussi à démontrer et l'utiliser dans la suite du sujet.

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

Exercice 1 - Sur les sommes et produits

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ l'expression $A_n = \frac{1}{n!} + \frac{e}{(n-1)!} + \frac{e^2}{(n-2)!} + \cdots + \frac{e^{n-1}}{1!} + \frac{e^n}{0!}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^n (-2)^k \frac{3^{k+1}}{2n}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Simplifier $\prod_{k=1}^n 2k$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $D_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n 1$.
5. Ecrire un programme Python appelé `Produit(n)` calculant $\prod_{k=1}^n k\pi$. On pourra considérer que `import numpy` `as np` a été tapé précédemment dans la console.

Exercice 2 – Raisonnement

Chaque question de cette partie compte double.

1. En utilisant un raisonnement par **disjonction de cas** résoudre l'équation :

$$|x - 3| + |x - 1| = (x - 2)^2 \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

2. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^{2^n} + 1$.

Montrer par **réurrence** que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{k=0}^n u_k = u_{n+1} - 2$.

3. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}. \end{cases}$$

Montrer à l'aide d'une **réurrence forte** que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n$.

Exercice 3 – Logique

Considérons la proposition $\mathcal{P}$ suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \sum_{k=1}^n r_k = 0 \implies \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad r_k = 0.$$

Remarque : En français la proposition $\mathcal{P}$ dit :

« si la somme de certains réels tous positifs est nulle alors tous ces réels sont nuls. »

1. Écrire la **négation de la proposition** $\mathcal{P}$ c'est-à-dire $\neg \mathcal{P}$.
2. Montrer la proposition $\mathcal{P}$ en utilisant un **raisonnement par l'absurde**.
Vous commencerez donc par supposer que $\neg \mathcal{P}$ est vraie.

Exercice 4 – Étude de suite

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n. \end{cases}$$

On définit également pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_{k+2} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k 2^k.$$

1. Ecrire un programme **Python** appelé **CalculT(n)** calculant $T(n)$.
2. Montrer en utilisant une **réurrence double** que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{2}n\right) 2^n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n = -\frac{1}{2}S_n$.
4. En utilisant la définition de la suite (u_n) , déterminer l'expression de S_n en fonction de u_{n+1} , puis en fonction de n .
5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression (la plus simplifiée possible) de T_n en fonction de n .
6. *Bonus* Ecrire un programme en Python appelé **CalculS(n)** renvoyant $S(n)$. On devra le faire en calculant la somme des u_{k+2} .

Exercice 5 – Suite

On considère, lorsqu'elle est bien définie, la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{6 + u_n}{2 + u_n}.$$

On supposera dans tout l'exercice que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq -2$.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ l'équation

$$\frac{6 + x}{2 + x} = x.$$

- (b) En déduire que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, c'est à dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = c$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -3 , ou la suite constante égale à 2 .

2. Ecrire un programme **Python** appelé **Suite(x,n)** renvoyant u_n lorsque $u_0 = x$.
3. Montrer que si $u_0 \neq 2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 2$.

Dans toute la suite, on suppose que $u_0 \neq 2$, et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 2}.$$

3. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -4 .
4. En déduire l'expression de v_n en fonction de u_0 et n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis celle de u_n .
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Tournez la page SVP

Problème (d'après Bac C, Paris–Créteil–Versailles, juin 1988)

I. Étude d'une fonction.

Le but de cette première partie est d'étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x > 0$, et $f(0) = 1$.

Rappels utiles

Dérivabilité en 0. Une fonction f est dérivable en 0 si $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow 0$.

Dans ce cas, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

Intégration d'une inégalité. Si $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Suite décroissante. Toute suite décroissante converge vers un réel ou vers $-\infty$. En particulier, toute suite décroissante et minorée converge vers un réel.

Passage à la limite. Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $u_{n+1} \rightarrow \ell$. De plus, si f est continue en ℓ , alors $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$.

- (a) Si on pose $h(x) = \ln(1+x)$, préciser le domaine de définition de la fonction h , et préciser la valeur de $h'(0)$.
(b) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.¹ Que peut-on en déduire concernant la fonction f ?
- (a) Montrer que, $\forall t \geq 0$, $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.
(b) En déduire que, si $x \geq 0$, alors $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
(c) Démontrer que, pour $x > 0$, $\ln(1+x) < x$.
- On définit pour cette question g sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$.
(a) Montrer que $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$ pour tout réel $x \geq 0$.
(b) Quel encadrement peut-on en déduire pour $g(x)$ (toujours pour $x \geq 0$) ?²
- À l'aide de la fonction g , étudier les variations de f .
- (a) Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ (en essayant d'être le plus rigoureux possible).
(b) En exploitant les questions précédentes, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
(c) En déduire que f est dérivable en 0, et donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative en 0.
(d) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f .

II. Une étude de suite.

On définit désormais la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Il est bien entendu autorisé (et même fortement conseillé!) d'utiliser si besoin les encadrements et autres résultats de la première partie du problème (y compris ceux donnés par l'énoncé qu'on n'a pas réussi à démontrer).

- Justifier que la suite est bien définie (autrement dit, qu'on n'aura jamais de problème de définition du $\ln$ pour le calcul de u_{n+1}), et étudier sa monotonie. En déduire la convergence de la suite (u_n) . Montrer que sa limite est nécessairement nulle.
- On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Déterminer la limite de $v_{n+1} - v_n$.
- Montrer que, $\forall x \in]0, 1]$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ (on pourra utiliser la fonction g définie plus haut) (mais ce n'est pas obligé...)
- En déduire que $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2}$, puis que $\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4}{n+4}$.
- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.
- Déterminer la limite de nu_n quand n tend vers $+\infty$.

1. On doit trouver 1

2. On doit trouver que $g(x) \geq 0$, entre autre