

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

Attention : le sujet n'est pas conçu pour être terminé intégralement. L'objectif est notamment d'évaluer votre capacité à aborder des questions de difficultés variées.

Commencez par lire l'ensemble du sujet et traitez en priorité les questions sur lesquelles vous vous sentez le plus à l'aise. Si vous restez bloqué plus de cinq minutes sur une question, il est conseillé de passer à la suivante.

Vous pouvez admettre un résultat que vous n'avez pas réussi à démontrer et l'utiliser dans la suite du sujet.

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

Exercice 1 - Sur les sommes et produits

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ l'expression $A_n = \frac{1}{n!} + \frac{e}{(n-1)!} + \frac{e^2}{(n-2)!} + \cdots + \frac{e^{n-1}}{1!} + \frac{e^n}{0!}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^n (-2)^k \frac{3^{k+1}}{2n}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer par un calcul direct que $\prod_{k=2}^n (5^{n+2} \times 3^{2k}) = 15^{(n-1)(n+2)}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $D_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$.
5. Ecrire un programme Python appelé `Produit(n)` calculant $\prod_{k=1}^n k\pi$. On pourra considérer que `import numpy` as `np` a été tapé précédemment dans la console.

Résultat admis

Suite croissante. Toute suite croissante converge vers un réel ou vers $+\infty$. En particulier, toute suite croissante et majorée converge vers un réel.

EDHEC 2013 ECE – Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
(b) Étudier les variations de la suite (u_n) .
(c) Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
2. (a) Écrire une fonction Python qui renvoie la valeur de u_n .
(b) *Énigme.* En déduire un programme Python qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a :

$$0 < 1 - u_n < 10^{-3}.$$

3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$.
(a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k .
(b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.
(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v_k^2$.

EDHEC 2010 ECE – Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0 , u_1 et u_2 .
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.
(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , puis en déduire les variations de la suite (u_n) .
3. (a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.
(b) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.

EM Lyon 2002 – Exercice 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$, $P'_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$, où P'_n désigne la dérivée de P_n .
2. Étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .
3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.
4. (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right)$.
(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 0$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n . Montrer aussi que $1 < x_n \leq 2$.
6. Écrire un programme en langage Python appelé `P(n,x)` qui calcule $P_n(x)$.

II – Des intégrales

1. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$: $t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$:

$$\int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt \geq \frac{n}{2}(x-1)^2,$$

Tournez la page SVP

Problème (d'après Bac C, Paris–Créteil–Versailles, juin 1988)

I. Étude d'une fonction.

Le but de cette première partie est d'étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x > 0$, et $f(0) = 1$.

Rappels utiles

Dérivabilité en 0. Une fonction f est dérivable en 0 si $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow 0$.

Dans ce cas, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

Intégration d'une inégalité. Si $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Suite décroissante. Toute suite décroissante converge vers un réel ou vers $-\infty$. En particulier, toute suite décroissante et minorée converge vers un réel.

Passage à la limite. Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $u_{n+1} \rightarrow \ell$. De plus, si f est continue en ℓ , alors $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$.

- (a) Si on pose $h(x) = \ln(1+x)$, préciser le domaine de définition de la fonction h , et préciser la valeur de $h'(0)$.
(b) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.¹ Que peut-on en déduire concernant la fonction f ?
- (a) Montrer que, $\forall t \geq 0$, $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.
(b) En déduire que, si $x \geq 0$, alors $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
(c) Démontrer que, pour $x > 0$, $\ln(1+x) < x$.
- On définit pour cette question g sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$.
(a) Montrer que $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$ pour tout réel $x \geq 0$.
(b) Quel encadrement peut-on en déduire pour $g(x)$ (toujours pour $x \geq 0$)?²
- À l'aide de la fonction g , étudier les variations de f .
- (a) Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ (en essayant d'être le plus rigoureux possible).
(b) En exploitant les questions précédentes, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
(c) En déduire que f est dérivable en 0, et donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative en 0.
(d) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f .

II. Une étude de suite.

On définit désormais la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Il est bien entendu autorisé (et même fortement conseillé!) d'utiliser si besoin les encadrements et autres résultats de la première partie du problème (y compris ceux donnés par l'énoncé qu'on n'a pas réussi à démontrer).

- Justifier que la suite est bien définie (autrement dit, qu'on n'aura jamais de problème de définition du $\ln$ pour le calcul de u_{n+1}), et étudier sa monotonie. En déduire la convergence de la suite (u_n) . Montrer que sa limite est nécessairement nulle.
- On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Déterminer la limite de $v_{n+1} - v_n$.
- Montrer que, $\forall x \in]0, 1]$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ (on pourra utiliser la fonction g définie plus haut) (mais ce n'est pas obligé...)
- En déduire que $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2}$, puis que $\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4}{n+4}$.
- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.
- Déterminer la limite de nu_n quand n tend vers $+\infty$.

1. On doit trouver 1

2. On doit trouver que $g(x) \geq 0$, entre autre