

Ce chapitre présente le vocabulaire mathématique pour raisonner, ainsi que différents types de raisonnements. Nous appliquerons ces exemples de raisonnements aux suites et aux techniques de calculs usuelles.

1 Suites : premières propriétés

Définition: Suite

Une suite est une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque:

1. En pratique, on notera "soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels". Aussi, par convention, au lieu de noter $u(n)$ le $n + 1$ ème terme de la suite, on le notera u_n .
2. L'ensemble de départ peut être distinct de $\mathbb{N}$. Par exemple, la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sera définie sur les entiers positifs non nuls; la suite $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n \geq 2}$ sur $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, etc...

Définition: Intervalle d'entiers

Pour n et m deux entiers relatifs tel que $n \leq m$, on notera $\llbracket n, m \rrbracket$ l'ensemble des entiers compris entre n et m .

Remarque Culturelle:

1. L'ensemble d'arrivée peut être autre chose que $\mathbb{R} : \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$, ou n'importe quel autre ensemble.
2. L'étude des suites concerne beaucoup de domaines : la modélisation et l'industrialisation des polymères (l'ADN ; les matériaux plastiques) ; les placements boursiers ou l'étude de la bourse en général ; l'étude des populations, etc...

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

Définition: Suite définie explicitement

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie explicitement si son terme de rang n est connue explicitement en fonction de n .

Par exemple, les suites $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(2n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies explicitement.

Définition: Définition par récurrence

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est définie par récurrence si on dispose de deux données :

1. Son premier terme u_{n_0}
2. Une expression reliant le $n + 1$ ème terme aux précédents.

Donnons différents exemples de suites définies par récurrence :

Exemple. Suite arithmétique Une suite arithmétique est la donnée d'une valeur initiale u_0 et d'une raison r , et est définie de la manière suivante :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Traduit en quantificateurs, cela donne : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si :

$$\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Exemple. Suite géométrique Une suite géométrique est la donnée d'une valeur initiale u_0 et d'une raison r , et est définie de la manière suivante :

$$u_{n+1} = r u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cela peut représenter un placement rapportant chaque année un pourcentage de la somme totale. Traduit en quantificateurs, cela donne : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si :

$$\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ru_n.$$

Exemple. Suite arithmético-géométrique Une suite arithmético géométrique est la donnée de son premier terme u_0 , et de deux réels a et b , et est définie comme

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Un exemple de suite arithmético-géométrique est la suivante : Si une personne place 100 euros par mois sur un compte rapportant 0.2 % par mois (tel que le livret A), cela donne la suite suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{0.2}{100}\right) u_n + 100 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exercice. Traduire avec des quantificateurs ce qu'est une suite arithmético-géométrique.

2 Expression exacte de suite

Proposition: Expression exacte d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = nr + u_0.$$

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n) : u_n = u_0 + nr$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $u_0 = u_0 + 0 \cdot r$, ce qui est bien vrai.

Hérédité. Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons qu'alors $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$.

Comme la suite est arithmétique de raison r , on a $u_{n+1} = u_n + r$. D'après $\mathcal{P}(n)$, $u_n = u_0 + nr$, donc :

$$u_{n+1} = (u_0 + nr) + r = u_0 + (n+1)r.$$

L'hérédité est donc démontrée.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr.$$

Proposition: Expression exacte d'une suite géométrique

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \cdot q^n.$$

Exercice. Démontrer cette proposition

Proposition: Expression exacte d'une suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$u_{n+1} = a u_n + b \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont fixés et $u_0 \in \mathbb{R}$ est donné.

— Si $a \neq 1$, en notant le point fixe $\ell = \frac{b}{1-a}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = a^n u_0 + b \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \ell + (u_0 - \ell) a^n.$$

— Si $a = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n b.$$

La démonstration est plus à connaître que la proposition. *Démonstration. A CONNAÎTRE PAR COEUR*

Cas $a \neq 1$. On cherche ℓ tel que $l = al + b$. On trouve que $\ell = \frac{b}{1-a}$. Considérons alors la suite auxiliaire $v_n = u_n - \ell$. On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - \ell = a(u_n - \ell) + (a\ell + b - \ell) = av_n.$$

Ainsi (v_n) est géométrique de raison a et $v_0 = u_0 - \ell$. Donc

$$v_n = a^n v_0 = a^n (u_0 - \ell),$$

ce qui donne

$$u_n = \ell + (u_0 - \ell) a^n.$$

Cas $a = 1$. La récurrence devient $u_{n+1} = u_n + b$. On reconnaît une suite arithmétique, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nb.$$

Cela achève la preuve. □

Remarque:

Si $|a| < 1$, alors $u_n \rightarrow \ell = \frac{b}{1-a}$. Si $|a| > 1$, le terme $(u_0 - \ell)a^n$ domine et la suite diverge dès que $u_0 \neq \ell$.

2.1 Croissance et décroissance d'une suite

Définition: Croissance d'une suite

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *croissante* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$, on a :

$$u_n \geq u_k.$$

On dira que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *strictement croissante* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < n$, on a :

$$u_n > u_k.$$

Enfin, on dira que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *décroissante* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$, on a :

$$u_n \leq u_k.$$

On dira que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *strictement décroissante* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < n$, on a :

$$u_n < u_k.$$

On peut aussi parler de suite croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang.

Exemples.

1. La suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + e^{-n} + 1$$

est monotone.

2. Une suite arithmétique est croissante si sa raison est positive, décroissante si sa raison est négative.
3. La suite $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante si $\alpha > 0$, décroissante si $\alpha < 0$ et constante si $\alpha = 0$.
4. La suite $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
5. La suite $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Exercice. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Démontrer l'équivalence entre :

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
2. $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On pourrait transcrire la proposition " u_n est croissante " par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n \Rightarrow u_k \leq u_n.$$

Exemple. Démontrer que la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Démonstration. Soit $n \geq k$ deux entiers strictement positifs. On a :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{k} = \frac{k-n}{kn} \leq 0,$$

car le numérateur est négatif tandis que le dénominateur est positif. Ainsi, $\frac{1}{n} - \frac{1}{k} \leq 0$, donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$. La suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

Exercice. 1. Démontrer que la suite $(n^2 - n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. Démontrer que la suite $n^2 + (-1)^n$ est croissante à partir d'un certain rang. Lequel est-ce ?

Exercice Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction

$$f_n : x \mapsto x^n + x - 1,$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$.

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que f_n est dérivable sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions dérivables. Ainsi, en dérivant la fonction, on tombe sur $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1$, qui est strictement positive sur $[0, 1]$. Donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[0, 1]$ dans $f([0, 1]) = [-1, 1]$. Ainsi, il existe un unique antécédent u_n à 0 dans $[0, 1]$, et cet antécédent n'est ni 0, ni 1, puisque $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$.

2. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1} - 1 = 0$, soit :

$$u_{n+1}^{n+1} = 1 - u_{n+1}.$$

Ainsi,

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n + u_{n+1} - 1 = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1} - 1 = -u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1}^n.$$

En simplifiant, on obtient

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n),$$

car $u_{n+1} \in]0, 1[$. Donc

$$f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons vu que la fonction f_n était strictement croissante. On peut donc déduire de l'inégalité $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ que $u_{n+1} > u_n$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Proposition: Première méthode pour prouver la croissance d'une suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On a l'équivalence suivante :

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

On a la même équivalence entre $((u_n)$ décroissante) et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n)$.

Démonstration. Pour démontrer la proposition ci-dessus, nous allons procéder par double implication.

1 $\Rightarrow$ 2 On suppose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $n \leq n+1$, on a alors que $u_{n+1} \geq u_n$.

2 $\Rightarrow$ 1 On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. Démontrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante par récurrence forte.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante : pour tout $k \leq n$, $u_k \leq u_n$.

Initialisation On peut initialiser à $n = 0$, il nous faut montrer que $u_0 \leq u_0$, ce qui est toujours vrai. On pourrait aussi initialiser à $n = 1$, auquel cas il faudrait montrer que $u_0 \leq u_1$, ce qui est vrai par ce que nous supposons.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $k \leq n$. Alors, en utilisant $\mathcal{P}(n)$ pour la première inégalité :

$$u_k \leq u_n \leq u_{n+1}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est démontrée.

Par récurrence, nous avons donc démontré $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons maintenant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \geq k$ deux entiers. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on obtient que $u_k \leq u_n$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Proposition: Seconde méthode pour prouver la croissance d'une suite

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement positive pour tout n . On a alors l'équivalence entre :

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Exercice. Démontrer cette proposition

Attention!!! Les deux propositions sur la croissance des suites sont très utiles. Il est bon de les connaître par coeur.

2.2 Suites récurrentes linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

Dans cette section, nous allons voir une méthode à connaître par coeur, et qui peut tomber aux concours.

Définition: Suites récurrentes linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \quad (E)$$

Une telle suite est définie par récurrence d'ordre 2 si on se donne en plus ses deux premiers termes u_0 et u_1 .

On recherche toutes les suites géométriques vérifiant la relation de récurrence (E), dont le terme général est de la forme $u_n = r^n$, pour $r \in \mathbb{R}^*$. L'équation (E) s'écrit alors :

$$r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n,$$

ou encore, en divisant chaque membre par r^n (possible car $r \neq 0$) :

$$r^2 = ar + b. \quad (EC)$$

Finalement, les suites de la forme $u_n = r^n$ qui vérifient (E) sont celles pour lesquelles r est une racine du polynôme $r^2 - ar - b$.

On commence donc par résoudre l'équation (EC), appelée **équation caractéristique** associée à la relation de récurrence (E).

Dans le cas où (EC) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 , les suites $(r_1^n)_n$ et $(r_2^n)_n$ vérifient la relation (E).

On remarque même que si λ et μ sont des réels, alors la suite $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_n$ vérifie aussi la relation (E).

Nous allons voir dans le théorème ci-dessous que les suites qui vérifient (E) sont en fait toutes de cette forme.

Définition: Equation caractéristique

L'équation caractéristique associée à une suite vérifiant (E) est :

$$x^2 - ax - b = 0 \quad (EC)$$

Théorème: Suite définies par une récurrence d'ordre 2

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant (E). On note Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique (EC).

- i. Si $\Delta > 0$: l'équation (EC) a deux solutions réelles r_1 et r_2 . Dans ce cas, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- ii. Si $\Delta = 0$: l'équation (EC) a une unique solution réelle r_0 . Dans ce cas, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n.$$

Remarque: Cas $\Delta = 0$.

Revenons sur les commentaires ci-dessus : dans le cas où $\Delta = 0$, il n'y a qu'une solution r_0 à l'équation caractéristique. Dans ce cas, on observe que la suite donnée par (nr_0^n) vérifie également (E) en remarquant que

$$\begin{aligned}(n+2)r_0^{n+2} - a(n+1)r_0^{n+1} - bn r_0^n &= r_0^n (n(r_0^2 - ar_0 - br_0) + 2r_0^2 - ar_0) \\ &= r_0^n (n(r_0^2 - ar_0 - br_0) + r_0(2r_0 - a)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

En effet, comme $\Delta = 0$, l'unique racine du polynôme est donnée par $r_0 = \frac{a}{2}$, ce qui donne bien $2r_0 - a = 0$. Par conséquent, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda r_0^n + \mu n r_0^n)_n$ vérifie la relation (E). Le théorème ci-dessus affirme que toutes les suites vérifiant (E) sont de cette forme.

La démonstration n'est pas à connaître !

Démonstration. On pose $P(x) = x^2 - ax - b$. On cherche ses zéros, qui sont, en notant $\Delta = a^2 - 4b$, $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. Nous allons maintenant raisonner par disjonction de cas :

1. **Cas 1 : $\Delta > 0$.** Dans ce cas, P a deux racines distinctes, que l'on note x_1 et x_2 . Nous allons maintenant chercher α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n.$$

Pour ce faire, on regarde les deux premiers termes :

$$\begin{aligned}\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha = u_0 - \beta \\ u_1 = \beta(x_2 - x_1) + u_0 x_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = u_0 - \beta \\ \beta = \frac{u_1 - u_0 x_1}{x_2 - x_1} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = u_0 - \frac{u_1 - u_0 x_1}{x_2 - x_1} \\ \beta = \frac{u_1 - u_0 x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}\end{aligned}$$

Notez que l'on pourrait bien entendu exprimer les x_i en fonction de a et b , mais ce n'est pas nécessaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'hypothèse de récurrence suivante : $u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$.

Initialisation L'initialisation est faite par le calcul ci-dessus : on a bien $u_0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1$ et $u_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies. On a :

$$\begin{aligned}u_{n+2} - (\alpha x_1^{n+2} + \beta x_2^{n+2}) &= a u_{n+1} + b u_n - (\alpha x_1^{n+2} + \beta x_2^{n+2}) \\ &= \alpha x_1^n (-x_1^2 + a x_1 + b) + \beta x_2^n (-x_2^2 + a x_2 + b) && \text{par } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \\ &= -\alpha x_1^n P(x_1) - \beta x_2^n P(x_2) && \text{car } P(X) = X^2 - aX - b \\ &= 0 && \text{car } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont racines de } P\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+2} = \alpha x_1^{n+2} + \beta x_2^{n+2}$.

Conclusion La récurrence a abouti, et donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. **Cas 2 : $\Delta = 0$** Lorsque $\Delta = 0$, P n'admet qu'une racine double, qui est $-\frac{b}{2a}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha x_1^n + n \beta x_1^n.$$

Pour ce faire, on regarde les deux premiers termes :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \alpha x_1 + \beta x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = -u_0 + \frac{u_1}{x_1} \end{cases}$$

Notez que l'on pourrait bien entendu exprimer x_1 en fonction de a et b , mais ce n'est pas nécessaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note maintenant $\mathcal{P}(n)$ l'hypothèse de récurrence suivante : $u_n = \alpha x_1^n + n \beta x_1^n$.

Initialisation L'initialisation est faite par le calcul ci-dessus : on a bien $u_0 = \alpha \cdot 1 + 0 \cdot \beta \cdot 1$ et $u_1 = \alpha x_1 + \beta x_1$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} - \alpha x_1^{n+2} - (n+2)\beta x_1^{n+2} &= au_{n+1} + bu_n - \alpha x_1^{n+2} - (n+2)\beta x_1^{n+2} \\ &= \alpha x_1^n(x_1^2 - ax_1 - b) + n\beta x_1^n(x_1^2 - ax_1 - b) + 2x_1^{n+1}(2x_1 - ax_1) \\ &\quad \text{par } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \\ &= \alpha x_1^n P(x_1) + n\beta x_1^n P(x_1) + 2x_1^{n+1}(2x_1 - ax_1) \\ &= 0 \quad \text{car } x_1 = -a/2 \text{ est racine de } P \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+2} = \alpha x_1^{n+2} + (n+2)\beta x_1^{n+2}$.

Conclusion La récurrence a abouti, et donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. Suite de Fibonacci On cherche l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On commence par écrire l'équation caractéristique associée :

$$r^2 = r + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 - r - 1 = 0.$$

Le discriminant associé vaut $\Delta = (-1)^2 + 4 \times 1 = 5$, et les racines sont :

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On sait alors que (u_n) est de la forme :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

On utilise les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 0, \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = 1. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = -\mu, \\ \lambda(r_1 - r_2) = 1. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

3 Suites majorées et minorées ; intervalles et ensembles.

3.1 Majorant et minorant d'intervalles / d'ensemble

On commence par un Théorème que l'on utilisera peu :

Théorème: Théorème de la borne inférieure (resp. supérieure)

Toute partie non vide minorée (resp. majorée) de $\mathbb{R}$ possède un unique plus grand minorant (resp. plus petit majorant).

Définition: Borne inférieure

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si E est minorée, on appelle **borne inférieure** de E son plus grand minorant. On note $\inf(E)$, lu "inf de E ", cette borne inférieure.
Si E n'est pas minorée, on pose $\inf(E) = -\infty$.

Définition: Borne supérieure

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si E est majorée, on appelle **borne supérieure** de E son plus petit majorant. On note $\sup(E)$, lu "sup de E ", cette borne supérieure.
Si E n'est pas majorée, on pose $\sup(E) = +\infty$.

Définition: Maximum et minimum

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- On dit que A admet un *maximum* si A est majoré et si son plus petit majorant appartient à A .
On note alors

$$\max A = M \iff M \in A \text{ et } \forall x \in A, x \leq M.$$

- On dit que A admet un *minimum* si A est minoré et si son plus grand minorant appartient à A .
On note alors

$$\min A = m \iff m \in A \text{ et } \forall x \in A, x \geq m.$$

Remarque:

- On remarque qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée si et seulement si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée, minorée ou bornée à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
Par exemple, supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée à partir d'un rang n_0 , c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq M$. Notons $M' = \max(u_0, \dots, u_{n_0-1}, M)$ la valeur maximale de la suite avant le rang n_0 . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors majorée par $M' = \max(M, M')$.
En effet, si $n < n_0$, on a $u_n \leq M'$, et si $n \geq n_0$, alors $u_n \leq M \leq M'$.
On dit dans ce cas que la suite vérifie cette propriété *à partir d'un certain rang*.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée ssi : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée ssi : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n < m$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq K$.

Exemples.

1. La suite $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée (par 0), mais pas majorée.
2. La suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
3. La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni majorée, ni minorée.

4 Convergence des suites réelles

4.1 Limite d'une suite, suites convergentes

Définition: Suite convergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang. Autrement dit,

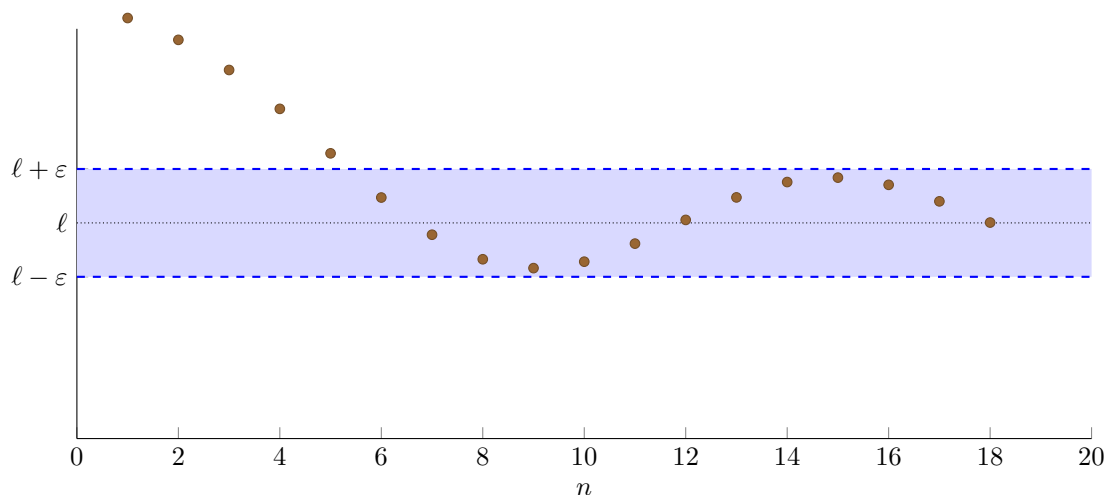
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[, \text{ c'est-à-dire } |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou plus simplement} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell.$$

Remarque:

Lorsqu'une suite ne tend vers aucune *limite finie*, on dit qu'elle *diverge*. Elle peut par exemple tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou encore osciller sans limite. On retiendra que la définition « $|u_n - \ell| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang » exprime l'idée que, *finalement* , les termes entrent et restent dans toute « bande » $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

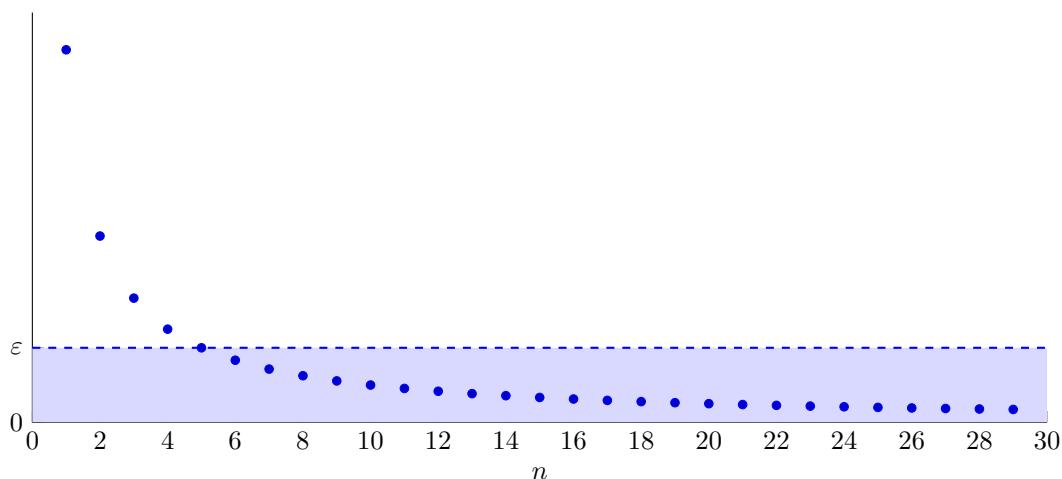


Exercice Ecrire "une suite n'a pas de limite" en langage mathématiques.

Exemple. La suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ et posons $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Pour tout $n \geq N$, on a $n > \frac{1}{\varepsilon}$, donc $\frac{1}{n} < \varepsilon$, soit encore

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.



Remarque:

- On peut se contenter d'intervalles du type $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ dans la définition, du fait que tout intervalle fermé contenant ℓ contient un intervalle de la forme $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
- Avec des quantificateurs, la définition se réécrit :

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

- **IMPORTANT** On n'écrit pas $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ avant d'avoir justifié l'existence de la limite.

Définition: Limite infinie

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$, contient tous les u_n à partir d'un certain rang. C'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > a.$$

Dans ce cas, on note

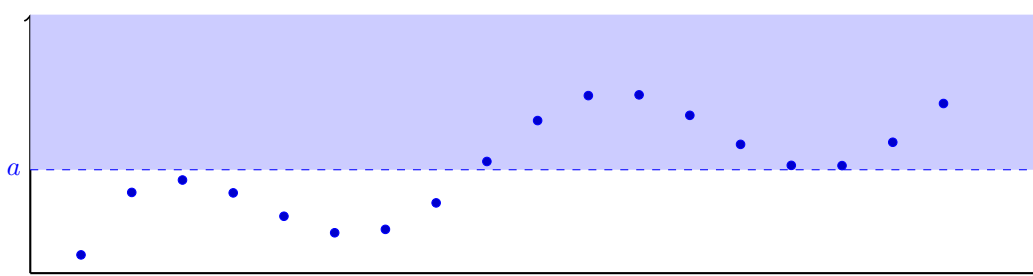
$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \quad \text{ou encore} \quad u_n \rightarrow +\infty.$$

De même, on dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $] -\infty, a[$, avec $a \in \mathbb{R}$, contient tous les u_n à partir d'un certain rang. C'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < a.$$

Dans ce cas, on note

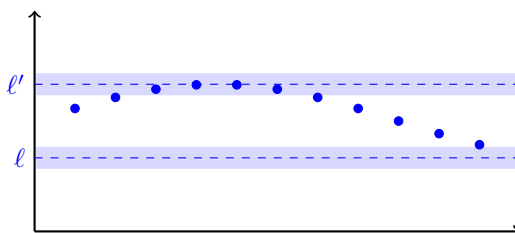
$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \quad \text{ou encore} \quad u_n \rightarrow -\infty.$$



Proposition: Unicité de la limite

Si une suite admet une limite, finie ou non, alors celle-ci est unique.

Idée de la preuve, dans le cas où la suite admet une limite finie. Supposons l'existence de deux limites distinctes ℓ et ℓ' . On peut alors choisir deux intervalles ouverts disjoints qui contiennent respectivement ℓ et ℓ' . À partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'un de ces intervalles, et aussi dans l'autre, ce qui est impossible. Ainsi une suite ne peut pas avoir deux limites distinctes.



Proposition: Limite finie et caractère borné

Si une suite admet une limite finie alors elle est bornée.

Démonstration. D'après la définition d'une suite convergente, si (u_n) converge vers une limite ℓ , il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel l'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$ contient tous les u_n . Ainsi, si $n \geq n_0$, on a $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Ceci prouve que (u_n) est bornée à partir du rang n_0 , elle est donc bornée.

Attention : La réciproque est fausse. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est bornée, mais ne converge pas.

Proposition: Signe de la limite et signe de la suite

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle qui tend vers une limite $\ell > 0$ ou vers $+\infty$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

De même, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell < 0$, ou vers $-\infty$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement négative à partir d'un certain rang.

Démonstration.

Cas $u_n \rightarrow \ell > 0$. Par définition, l'intervalle $]\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}]$, qui contient ℓ , contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 . Ainsi, si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$, donc $u_n > 0$.

Cas $u_n \rightarrow +\infty$. Par définition, l'intervalle $]1, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 . Ainsi, si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq 1 > 0$, donc $u_n > 0$.

Le deuxième cas se traite de manière analogue.

Attention : Le résultat devient faux si l'inégalité est large ! Par exemple : si $u_n = -\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $u_n \rightarrow 0$ avec $\ell = 0$. On a $\ell \geq 0$, mais (u_n) n'est pas positive à partir d'un certain rang.

Exercice classique Une suite réelle (u_n) tend vers ℓ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$) si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent toutes les deux vers ℓ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$).

Démonstration. Voir TD.

Remarque:

Par contraposition, si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne convergent pas toutes les deux, ou admettent deux limites différentes, alors (u_n) ne converge pas. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites constantes donc convergentes, respectivement vers 1 et -1 . On en déduit que la suite (u_n) ne converge pas.

Exercice Montrer que la suite $(\sin(\frac{n\pi}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

4.2 Opérations sur les limites

Proposition: Somme et multiplication par un scalaire de suites convergentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites admettant des limites finies et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les suites $(u_n + v_n)$ et (λu_n) convergent, et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

On a les règles de calcul suivantes pour la limite d'une somme, et la limite de la multiplication d'une suite par un scalaire λ .

$\lim u / \lim v$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ind.
$-\infty$	$-\infty$	ind.	$-\infty$

Valeurs de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$

$\lim u$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$\lambda \ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	$\lambda \ell$	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0

Valeurs de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n)$

Les cas notés *ind.* désignent des formes dites *indéterminées* : différents cas peuvent se produire, et on ne peut donc pas statuer dans le cas général. Il convient dans ces cas de faire une étude plus poussée de la suite, comme nous allons le voir plus loin.

Proposition: Produit de suites convergentes

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites admettant des limites finies, alors la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right).$$

On a les règles de calcul suivantes pour la limite d'un produit.

$\lim u \backslash \lim v$	$\ell' > 0$	$\ell' = 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$\ell \ell'$	0	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$	0	0	0	ind	ind
$\ell < 0$	$\ell \ell'$	0	$\ell \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	ind	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	ind	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Valeurs possibles de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$

Proposition: Passage à la limite des inégalités larges

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Remarque:

- Si (u_n) est une suite positive convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$.
- Une inégalité stricte devient large à la limite! Si deux suites convergentes (u_n) et (v_n) vérifient $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$, mais pas $\lim u_n < \lim v_n$ en général.
Exemple : si $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$, on a $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

La proposition suivante sera la version discrète du raisonnement de fonction, que nous n'avons pas encore traitée, mais qui est déjà connue intuitivement. Elle sera rendue rigoureuse dans un prochain chapitre.

Proposition: Limite composée

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui admet une limite ℓ finie ou infinie.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = \ell', \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell',$$

où ℓ' est également une limite finie ou infinie.

Remarque:

En particulier, comme nous le reverrons prochainement, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$f(u_n) \longrightarrow f(\ell).$$

C'est très utile!

4.3 Gestion de certaines formes indéterminées

Un principe pour la gestion de formes indéterminées du type de celles décrites dans le paragraphe précédent est de factoriser par le terme dominant, de manière à faire apparaître des termes ayant une limite nulle, que l'on pourra ignorer.

Exemple. Calcul de la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $u_n = \frac{n^2 + 3}{n^3 - 5n + 4}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{n^2 + 3}{n^3 - 5n + 4} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)}{n^3 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^3}\right)} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^3}} \rightarrow 0.$$

4.3.1 Croissances comparées

Théorème: Croissances comparées

Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\beta}{e^{\gamma n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\gamma n}}{n!} = 0.$$

De même,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\beta}{(\ln n)^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\gamma n}}{n^\beta} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^{\gamma n}} = +\infty.$$

Démonstration. Voir plus loin.

Exercice Calculer les limites suivantes.

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n/2-3}}{4n^4 - 3n^2 + 1}, \quad 2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^n) e^{-n}.$$

1. On a

$$\frac{e^{n/2-3}}{4n^4 - 3n^2 + 1} = \frac{e^{-3}}{4 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \cdot \frac{e^{n/2}}{n^4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

car $4 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4} \rightarrow 4$, et $\frac{e^{n/2}}{n^4} \rightarrow +\infty$.

2. On a

$$\ln(n^n) e^{-n} = \frac{n \ln n}{e^n} = \frac{n^2}{e^n} \cdot \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

par croissances comparées, puisque $\frac{n^2}{e^n} \rightarrow 0$ et $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$.

4.3.2 Utilisation de la conjugaison

Certaines formes indéterminées peuvent être levées en ayant recours à la quantité conjuguée : pour $a, b \in \mathbb{R}$, on réécrit

$$a - b = (a - b)(a + b)/(a + b) = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Dans certains cas, notamment lorsque l'expression fait apparaître des racines carrées, cette réécriture lève l'indétermination, et permet un calcul simple de limite.

Exemple. Calcul de la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où

$$u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On a :

$$n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = n \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

4.3.3 Utilisation de la dérivée

Rappel. Une fonction réelle f est dérivable en un point $x \in \mathbb{R}$ si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe et est finie. On l'appelle alors dérivée de f en x , et on la note $f'(x)$. Dans ce cas, pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0, on a :

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(x).$$

Ceci permet de calculer des limites qui font apparaître un terme du type $\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$, où f est une fonction dérivable en x .

Exemples.

1. On retrouve le calcul de limite du paragraphe ci-dessus : en posant $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a

$$\frac{f(1+\frac{1}{n}) - f(1)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

2. On peut calculer par ce biais la limite de la suite $n(\ln(1+\frac{1}{n}))$, en posant $f : x \mapsto \ln(x)$:

$$\frac{f(1+\frac{1}{n}) - f(1)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(1) = 1.$$

Par conséquent,

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

La continuité de la fonction exponentielle permet de déduire la limite suivante, qui est à connaître :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^1 = e.$$

3. On peut de même déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(n)$.

5 Théorèmes d'existence

5.1 Encadrement, comparaison

Théorème: Encadrement, ou théorème des gendarmes

Soit (u_n) une suite réelle. S'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) qui ont même limite $\ell \in \mathbb{R}$, et telles que

$$a_n \leq u_n \leq b_n$$

à partir d'un certain rang alors la suite (u_n) admet également ℓ pour limite.

Idée de la démonstration. Pour simplifier, on se place dans le cas où $a_n \leq u_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de voir que pour un intervalle $I =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ contenant la limite ℓ , on sait qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de (a_n) et de (b_n) sont dans I . Alors, à partir de ce rang n_0 , l'inégalité $a_n \leq u_n \leq b_n$ entraîne que (u_n) est aussi dans I . Ainsi, tous les termes de la suite à partir du rang n_0 sont dans l'intervalle voulu : (u_n) converge donc bien vers ℓ .

Méthode: Montrer qu'une suite converge vers un réel donné

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_n$ converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$, on cherche à majorer $|u_n - \ell|$ par une suite $(a_n)_n$ qui tend vers 0 : si $(a_n) \rightarrow 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| \leq a_n,$$

alors l'encadrement $-a_n \leq u_n - \ell \leq a_n$ assure bien que $u_n \rightarrow \ell$.

Exercice 5. Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

$$1. u_n = \frac{\sin n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 2. u_n = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k + 9}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$3. u_n = 2 + \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Théorème: Comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$. Alors :

- si $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$,
- si $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.

Exemple. Déterminons la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^4 + n^2 + 4n + 4}$. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \geq \sqrt{n^2 + 4n + 4} = \sqrt{(n+2)^2} = n+2,$$

car $n+2 \geq 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n \geq n \rightarrow +\infty.$$

Par le théorème de comparaison, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

5.2 Théorème de la limite monotone

Théorème: Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite réelle.

- Si (u_n) est croissante, alors :
 - si (u_n) est majorée, alors elle converge,
 - si (u_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
- Dans le cas où $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, on a $u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si (u_n) est décroissante, alors :
 - si (u_n) est minorée, alors elle converge,
 - si (u_n) n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.
- Dans le cas où $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, on a $u_n \geq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention : Une suite croissante et majorée par M converge mais pas forcément vers M !

Remarque:

- Une suite monotone admet donc forcément une limite, finie ou infinie.
- Si une suite est monotone à partir d'un certain rang, le résultat du théorème est toujours valable.

Corollaire: Suite définie par une somme

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite *positive* et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, donc (S_n) tend vers $+\infty$ ou vers une limite finie positive.

Exemple. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est strictement croissante. On peut montrer qu'elle diverge vers $+\infty$.

5.3 Convergence des suites adjacentes

Définition: Suites adjacentes

On dit que deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si :

- (u_n) est croissante,
- (v_n) est décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Remarque:

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leq v_n.$$

En effet, si pour un rang n_0 , on a $u_{n_0} > v_{n_0}$, alors la monotonie des suites (u_n) et (v_n) implique que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n_0} > v_{n_0} \geq v_n$, ce qui contredirait le fait que $u_n - v_n \rightarrow 0$.

Théorème: Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors :

1. les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ finie,
2. si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Démonstration. Nous avons vu ci-dessus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Ainsi, on a $u_n \leq v_n$ par décroissance de (v_n) . La suite (u_n) , croissante, est donc majorée par (v_n) . On en déduit que (u_n) est convergente vers une limite notée ℓ .

De même, on a $v_n \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) , décroissante, est donc minorée. Elle converge alors aussi, vers une limite que l'on note ℓ' .

Par hypothèse, $u_n - v_n \rightarrow 0$. D'après la définition des suites adjacentes, on a alors $\ell = \ell'$. Ainsi, (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ .

Enfin, l'encadrement $u_n \leq \ell \leq v_n$ découle des inégalités montrées plus haut et du passage à la limite.

Exemple. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n}.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{n+1+k} - \frac{1}{n+k} \right).$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$, donc (u_n) est croissante. De même,

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n} \right) < 0,$$

donc (v_n) est décroissante. Enfin, on a

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Ainsi, par le théorème des suites adjacentes, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

6 Introduction à l'étude des suites récurrentes

On s'intéresse ici à l'étude des suites définies par récurrence qui sont de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ fixé,} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (R)$$

où f est une fonction réelle.

Proposition: Limite d'une suite récurrente (HP)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui vérifie la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f est une fonction réelle continue.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ , alors

$$f(\ell) = \ell.$$

On dit dans ce cas que ℓ est un *point fixe* de f .

Démonstration. Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ par continuité de f . Or $u_{n+1} \rightarrow \ell$. Par unicité de la limite, on a alors $f(\ell) = \ell$. $\square$

Attention : L'étude générale de ces suites n'est pas explicitement au programme. On veillera donc à détailler l'obtention de la condition $f(\ell) = \ell$ à chaque fois que l'on s'en servira.

Attention : Toutes les suites définies par récurrence ne sont pas de la forme (R) . Par exemple, si $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$ pour tout entier n , on ne peut pas écrire u_{n+1} sous la forme $f(u_n)$ à l'aide d'une fonction indépendante de n .