
1 Coût d'un emprunt bancaire

Un couple s'apprête à acheter un bien, et doit emprunter à la banque. Le bien coûte p euros, et le couple souhaite emprunter sur m années à un taux d'intérêt annuel i . (Par exemple, actuellement, $i = 3,5/100$ en moyenne). L'objectif de cet exercice est de déterminer la somme que le couple paiera au total, et quelle est la mensualité r .

Le fonctionnement de la banque est le suivant. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où v_n est le montant à rembourser au bout de n mois. Chaque mois, si le couple donne r euros à la banque, une partie de ces r euros sert tout d'abord à payer les intérêts mensuels, puis le reste contribue à rembourser le capital à rembourser.

1. Justifier que $v_{n+1} = v_n(1 + i/12) - r$.
2. On note $q = 1 + i/12$. Déterminer une expression de v_n en fonction de n , de r et q .
3. Déterminer maintenant r en fonction de m .
4. Calculer l'argent total que le couple paiera pour son bien.

Corrigé

1. Les intérêts à un certain mois sont $v_n \times i/12$, puisque i sont les taux d'intérêts annuels, donc le taux d'intérêt mensuels sont $i/12$. Donc, on soustrait à v_n le réel $r - v_n \times i/12$: parmi les r euros donnés à la banque, $v_n \times i/12$ partent dans les intérêts.

Ainsi, $v_{n+1} = v_n - (r - v_n \times i/12) = v_n(1 + i/12) - r$.

2. On a donc $v_{n+1} = qv_n - r$. On pose $w_n = v_n + x$, en suivant la méthode du cours. On a donc

$$w_{n+1} = v_{n+1} + x = qv_n - r + x = q(w_n - x) - r + x = qw_n - r + x(1 - q).$$

Donc, avec $x = r/(1 - q)$, on obtient que $w_{n+1} = qw_n$. Donc, w_n est géométrique, et $w_n = q^n w_0$. Donc, $v_n = w_n - x = q^n w_0 - x = q^n(v_0 + x) - x$. En injectant l'expression de x , on trouve $v_n = q^n \left(v_0 + \frac{r}{1 - q} \right) - \frac{r}{1 - q}$.

3. On a les conditions $v_0 = p$ et $v_{12m} = 0$. Donc,

$$q^{12m} \left(v_0 + \frac{r}{1 - q} \right) - \frac{r}{1 - q} = 0 \iff \frac{r}{1 - q} (q^{12m} - 1) = -pq^{12m} \iff r = \frac{p(q - 1)}{1 - q^{-12m}}.$$

4. Il paiera donc $12m \times r = \frac{12mp(q - 1)}{1 - q^{-12m}}$ euros.

2 Suite arithmétique et géométrique

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n, \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est géométrique. En déduire une expression de $u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{v_n}{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique, et en déduire une expression de w_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression explicite de u_n et v_n , en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_n - v_n + u_n + 4v_n = 3(u_n + v_n)$.

Ainsi, la suite $(u_n + v_n)$ est géométrique de raison 3. De plus, $u_0 + v_0 = 3$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente,

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{u_n + 4v_n}{3^{n+1}} = \frac{u_n + v_n + 3v_n}{3^{n+1}} = \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{v_n}{3^n} = 1 + w_n.$$

Ainsi, la suite (w_n) est arithmétique de raison 1. De plus, $w_0 = v_0 = 1$, donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = n + 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = 3^n w_n = (n+1)3^n$. De plus, $u_n = 3^{n+1} - v_n = 3^{n+1} - (n+1)3^n = (2-n)3^n$.

3 Exercice

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 3^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{3^n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique et en déduire l'expression explicite de u_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé

On a $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{3u_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3} = v_n + \frac{1}{3}$.

Donc, $v_n = v_0 + \frac{n}{3} = u_0 + \frac{n}{3}$, et donc $u_n = 3^n v_n = 3^n + n3^{n-1}$.

4 Suites diverses

Pour chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes, déterminer une expression explicite de u_n , étudier la limite de (u_n) .

1. $\begin{cases} u_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n. \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2(u_n)^2. \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, u_1 = \frac{1}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{3}{u_{n+1}} - \frac{2}{u_n}. \end{cases}$

Corrigé

1. On a $u_{n+1} = 4u_n - 3$. On pose $w_n = u_n + x$, en suivant la méthode du cours. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = u_{n+1} + x = 4u_n - 3 + x = 4(w_n - x) - 3 + x = 4w_n - 3 - 3x.$$

Avec $x = -1$, on obtient $w_{n+1} = 4w_n$. Ainsi, la suite (w_n) définie par $w_n = u_n - 1$ est géométrique de raison 4. De plus, $w_0 = u_0 - 1 = 1$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 4^n$. Ainsi, $u_n = 4^n + 1$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ses racines sont 1 et 2. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + b2^n$.

Les conditions initiales donnent
$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a + 2b = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2, \\ b = -1. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - 2^n$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Elle admet 3 comme racine double. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (a + bn)3^n$.

Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} a = -1, \\ 3(a + b) = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1, \\ b = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(-1 + \frac{4n}{3}\right)3^n$. Par limite usuelle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. Comme $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 > 0$, une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On peut donc poser $v_n = \ln(u_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(2u_n^2) = \ln(2) + 2v_n.$$

On pose $w_n = v_n + x$. On a $w_{n+1} = v_{n+1} + x = 2v_n + \ln(2) + x = 2w_n + \ln(2) - x$.

Avec $x = \ln(2)$, on obtient $w_{n+1} = 2w_n$. Ainsi, la suite (w_n) définie par $w_n = v_n + \ln(2)$ est géométrique de raison 2. De plus, $w_0 = \ln(u_0) + \ln(2) = \ln(2u_0)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2^n \ln(2u_0)$.

Ainsi, $v_n = 2^n \ln(2u_0) - \ln(2)$, puis $u_n = e^{v_n} = \frac{1}{2}(2u_0)^{2^n}$.

On distingue alors trois cas.

- Si $0 < u_0 < \frac{1}{2}$, alors $0 < 2u_0 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $u_0 = \frac{1}{2}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}$.
- Si $u_0 > \frac{1}{2}$, alors $2u_0 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. La relation de récurrence devient $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$.

L'équation caractéristique associée est $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ses racines sont 1 et 2. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a + b2^n$.

Or $v_0 = \frac{1}{u_0} = 2$ et $v_1 = \frac{1}{u_1} = 3$. Ainsi,
$$\begin{cases} a + b = 2, \\ a + 2b = 3, \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + 2^n$. Ainsi, $u_n = \frac{1}{1 + 2^n}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

5 Suite auxiliaire

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n - 1)$. Déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire u_n .

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n > 1$.
 - **Initialisation.** Par hypothèse, $u_0 > 1$.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 1$. Alors $u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^2 > 0$, donc $u_{n+1} > 1$.
2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 > 0$. La suite (v_n) est donc bien définie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln((u_n - 1)^2) = 2\ln(u_n - 1) = 2v_n.$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison 2. De plus, $v_0 = \ln(u_0 - 1)$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n \ln(u_0 - 1)$.

Ainsi, $\ln(u_n - 1) = 2^n \ln(u_0 - 1) = \ln((u_0 - 1)^{2^n})$. Donc, $u_n - 1 = (u_0 - 1)^{2^n}$; et $u_n = 1 + (u_0 - 1)^{2^n}$.

6 Exercice

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1, v_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. En déduire que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. Calculer alors u_n et v_n en fonction de n .

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - (2u_n + 3v_n) = u_n - v_n$.
Ainsi, la suite $(u_n - v_n)$ est constante. Comme $u_0 - v_0 = -1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -1$.
2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 1$.
Ainsi, $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_n + 2(u_n + 1) = 5u_n + 2$. Donc (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. On pose $w_n = u_n + x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = u_{n+1} + x = 5u_n + 2 + x = 5(w_n - x) + 2 + x = 5w_n + 2 - 4x.$$

Avec $x = \frac{1}{2}$, on obtient $w_{n+1} = 5w_n$. Ainsi, la suite (w_n) définie par $w_n = u_n + \frac{1}{2}$ est géométrique de raison 5. De plus, $w_0 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{3}{2} 5^n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{2} 5^n - \frac{1}{2}$. Enfin, comme $v_n = u_n + 1$, on obtient $v_n = \frac{3}{2} 5^n + \frac{1}{2}$.

7 Suite récurrente d'ordre 3

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = x_{n+1} - x_n$. Déterminer une relation entre v_{n+2} , v_{n+1} et v_n . Calculer également v_0 et v_1 .
2. Déterminer v_n en fonction de n . En déduire x_n en fonction de n . *Indice en bas de la page, à ne regarder que si vous avez passé plus de 10 minutes sur le passage de v_n à x_n* ¹

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} = x_{n+3} - x_{n+2} = x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = (x_{n+2} - x_{n+1}) + 2(x_{n+1} - x_n) = v_{n+1} + 2v_n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$. De plus, $v_0 = x_1 - x_0 = -1$ et $v_1 = x_2 - x_1 = 4$.

2. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est $r^2 - r - 2 = 0$. Ses racines sont 2 et -1 . Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a2^n + b(-1)^n$.

Les conditions initiales donnent $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a - b = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n - 2(-1)^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = 3 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k - 2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = 3 + (2^n - 1) - (1 - (-1)^n) = 2^n + 1 + (-1)^n.$$

Cette expression étant également valable pour $n = 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2^n + 1 + (-1)^n$.

8 Monotonie

Déterminer la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = n^2 - 2n$, pour tout $n \geq 1$.

2. $u_n = \frac{n^2}{n!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. $u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. $u_n = \binom{n}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $k \in \mathbb{N}^*$ est un entier fixé.

¹On pourra utiliser que $x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) + x_0$

Corrigé

1. Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2(n+1) - (n^2 - 2n) = 2n - 1 > 0$. Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante.

2. On a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}$.

Pour $n = 1$, ce quotient est strictement supérieur à 1. Pour tout $n \geq 2$, on a $n^2 > n+1$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante jusqu'au rang 2, puis strictement décroissante à partir du rang 2.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(2n+1)^2 + (2n+2)^2 - 4(n+1)^2}{(2n+1)^2(2n+2)^2}.$$

Or $(2n+1)^2 + (2n+2)^2 - 4(n+1)^2 = (2n+2)^2 - 3(2n+1)^2 < 0$. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$, et la suite (u_n) est strictement décroissante.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1$. Comme $u_n \geq 0$, on déduit que la suite (u_n) est décroissante.

5. La suite est constante et égale à 0 jusqu'au rang $k-1$ puisque $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $n < k$.

Pour tout $n \geq k$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n+1-k} > 1$, puisque $k \geq 1$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ et strictement croissante à partir du rang k .

9 Manipulation de la définition de limite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ . Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

Corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0$, $|u_{2n} - \ell| < \varepsilon$.

De même, comme $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$.

On pose $N = 2 \max(N_0, N_1)$. Soit $n \geq N$.

- Si n est pair, il existe $p \geq \max(N_0, N_1)$ tel que $n = 2p$. Ainsi, $|u_n - \ell| = |u_{2p} - \ell| < \varepsilon$.
- Si n est impair, il existe $p \geq \max(N_0, N_1)$ tel que $n = 2p+1$. Ainsi, $|u_n - \ell| = |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$.

Donc, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

10 Manipulation de la définition de limite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de période $N \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+N} = u_n$. On suppose de plus que (u_n) converge vers l . Démontrer que u_n est constante.

Corrigé

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que $u_p = \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

On choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que $p + kN \geq N_0$. Comme la suite (u_n) est de période N , on a $u_{p+kN} = u_p$. Ainsi, $|u_p - \ell| = |u_{p+kN} - \ell| < \varepsilon$.

Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a $u_p = \ell$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = \ell$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

11 Manipulation de la définition de limite

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

Corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq N_0$, $|u_n v_n - 1| \leq \varepsilon$. Puisque $u_n \leq 1$ et $v_n \leq 1$, cette inégalité est $1 - u_n v_n \leq \varepsilon$, soit $u_n v_n \geq 1 - \varepsilon$. Puisque $v_n \leq 1$, on a donc que $u_n \geq 1 - \varepsilon$, soit $|u_n - 1| \leq \varepsilon$. Donc, par définition de la limite, $u_n \rightarrow 1$. De même pour v_n .

12 A MAITRISER : Suites récurrentes avec le sinus

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$. En déduire le sens de variation de (u_n) .
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.
4. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\sin(x) < x$.
5. En déduire par un raisonnement par l'absurde que $u_n \rightarrow 0$.

Corrigé

1. Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : 0 \leq u_n \leq 1$.

- **Initialisation.** On a $u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. On a donc $0 \leq u_n \leq 1$.

Comme $0 \leq u_n \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, on a $0 \leq \sin(u_n) \leq 1$. Ainsi, $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

2. On pose, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = x - \sin(x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$. Donc, pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Ainsi, $u_{n+1} = \sin(u_n) \leq u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente. On note ℓ sa limite. Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ell \geq 0$.
4. Reprenons la fonction $f : x \mapsto x - \sin(x)$. Pour tout $t \in]0, x]$, $f'(t) = 1 - \cos(t) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et, pour $x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$. Donc $\sin(x) < x$.

5. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\ell > 0$.

Comme $u_n \rightarrow \ell$, on a également $u_{n+1} \rightarrow \ell$. De plus, par continuité de la fonction sinus, $\sin(u_n) \rightarrow \sin(\ell)$. Or $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Par unicité de la limite, $\ell = \sin(\ell)$.

Mais $\ell > 0$, donc, d'après la question précédente, $\sin(\ell) < \ell$, ce qui est absurde.

Ainsi, $\ell = 0$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

13 A MAITRISER : Suites récurrentes avec l'arctangente

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. Monter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\arctan(x) \leq x$. En déduire le sens de variation de (u_n) .
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.
4. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\arctan(x) < x$.
5. En déduire par un raisonnement par l'absurde que $u_n \rightarrow 0$.

Corrigé

1. Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : 0 \leq u_n \leq 1$.

- **Initialisation.** On a $u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. On a donc $0 \leq u_n \leq 1$.

La fonction arctangente étant croissante, $0 = \arctan(0) \leq \arctan(u_n) \leq \arctan(1) = \frac{\pi}{4} < 1$. Ainsi, $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

2. On pose, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = x - \arctan(x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$. Donc, pour tout $x \geq 0$, $\arctan(x) \leq x$.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Ainsi, $u_{n+1} = \arctan(u_n) \leq u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente. On note ℓ sa limite. Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ell \geq 0$.
4. Reprenons la fonction $f : x \mapsto x - \arctan(x)$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$. Ainsi, $\arctan(x) < x$.

5. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\ell > 0$.

Comme $u_n \rightarrow \ell$, on a également $u_{n+1} \rightarrow \ell$. De plus, par continuité de la fonction arctangente, $\arctan(u_n) \rightarrow \arctan(\ell)$. Or $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. Par unicité de la limite, $\ell = \arctan(\ell)$.

Mais $\ell > 0$, donc, d'après la question précédente, $\arctan(\ell) < \ell$, ce qui est absurde.

Ainsi, $\ell = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

14 Suites à analyser

Déterminer le comportement asymptotique (convergence/divergence, limite si possible) des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

-
- a. $u_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$
- b. $u_n = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$
- c. $u_n = \frac{((-1)^n + n^3)e^{-n}}{((-1)^n + e^{-n})n^3}$
- d. $u_n = (\cos(n) + 3)\ln(n)$
- e. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
- f. $u_n = \frac{2^n}{n!}$
- g. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
- h. $u_n = \left\lfloor \frac{3}{n} + 1 \right\rfloor$
- i. $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}, x \in \mathbb{R}$
- j. $u_n = \frac{3n+1}{2n^2-1}$
- k. $u_n = \frac{2n^2+3n+1}{5n^2+4n-2}$
- l. $u_n = \frac{\ln^2(n)-2}{\ln(n)+n}$
- m. $u_n = \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)-3}{n+3}$
- n. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \text{ où } 0 < a < b$
- o. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$
- p. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

Corrigé

- a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{6n} = 1$ et $u_{6n+3} = -1$. Les suites extraites (u_{6n}) et (u_{6n+3}) n'ayant pas la même limite, la suite (u_n) diverge.
- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|(-1)^n + e^{-n}| \geq 1 - e^{-n} \geq 1 - e^{-1}$. Ainsi,
- $$|u_n| = \frac{|(-1)^n + n^3| e^{-n}}{n^3 |(-1)^n + e^{-n}|} \leq \frac{(1 + n^3)e^{-n}}{n^3(1 - e^{-1})} = \frac{e^{-n}}{1 - e^{-1}} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right).$$
- Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\ln(n) \leq u_n \leq 4\ln(n)$. Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- e. Via la quantité conjuguée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- f. Par croissance comparée, la limite est nulle.
- g. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^n \frac{k}{n}$. Le premier terme vaut $\frac{1}{n}$ et tous les autres facteurs sont inférieurs ou égaux à 1. Ainsi, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- h. Pour tout $n \geq 4$, $1 < 1 + \frac{3}{n} < 2$. Ainsi, pour tout $n \geq 4$, $u_n = 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$. En divisant par $n > 0$, on obtient $x - \frac{1}{n} < u_n \leq x$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$.
- j. En divisant le numérateur et le dénominateur par n^2 , on obtient $u_n = \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}}$. Par quotient de limites usuelles, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

k. De même, $u_n = \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}}$. Par quotient de limites usuelles, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{5}$.

l. On a $u_n = \frac{\frac{\ln^2(n)}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{\ln(n)}{n} + 1}$. Par croissance comparée, $\frac{\ln^2(n)}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

m. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-4 \leq \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - 3 \leq -2$. Ainsi, $-\frac{4}{n+3} \leq u_n \leq -\frac{2}{n+3}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

n. En divisant le numérateur et le dénominateur par b^n , on obtient $u_n = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$. Or $0 < \frac{a}{b} < 1$, donc $\left(\frac{a}{b}\right)^n \rightarrow 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

o. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Ainsi, $0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

p. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{n}$. En sommant ces inégalités, $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq 1$. Or $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \rightarrow 1$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

15 Comparaison de limites

Comparer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right)^n, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n.$$

Corrigé

Pour tout $n \geq 2$, on a $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$. Ainsi, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m = 0$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0^n = 0$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$. Par composée de limites usuelles, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m = 1$.

Ainsi, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

Enfin, pour tout $n \geq 2$, $\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$. Or $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}}$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1$.

Par continuité de la fonction exponentielle en -1 , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = e^{-1}$.

Ainsi, $0 < e^{-1} < 1$. En particulier, les deux limites successives ne sont pas égales : l'ordre dans lequel on fait tendre n et m vers $+\infty$ est important.

16 Suite récurrente bornée

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'on a $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : 0 \leq u_n \leq 2$.

- **Initialisation.** On a $u_0 = 0$, donc $P(0)$ est vraie. De plus, $u_1 = 1 + \frac{u_0}{1} = 1$, donc $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leq u_n \leq 2$. Alors $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1} \geq 1 \geq 0$. De plus, comme $n+1 \geq 2$, $u_{n+1} \leq 1 + \frac{2}{n+1} \leq 2$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{u_n}{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n+1} = 0$. Ainsi, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1} \rightarrow 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

17 Suite trigonométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2 \sin\left(\frac{u_n}{2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq x$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Corrigé

1. On pose, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = x - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ et, pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Or $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1$. Ainsi, $f'(x) \geq 0$.

x	0	1
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$1 - 2 \sin\left(\frac{1}{2}\right)$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq f(0) = 0$, donc $2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq x$.

De plus, $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq x$.

2. Procédons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P(n) : 0 \leq u_n \leq 1$.

- **Initialisation.** On a $u_1 = 1$, donc $0 \leq u_1 \leq 1$.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$. D'après la question précédente, $0 \leq u_{n+1} = 2 \sin\left(\frac{u_n}{2}\right) \leq u_n \leq 1$.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 1$. De plus, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2 \sin\left(\frac{u_n}{2}\right) \leq u_n$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente. On note ℓ sa limite.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 1$, on a $\ell \in [0, 1]$. Par continuité de la fonction sinus, $\ell = 2 \sin\left(\frac{\ell}{2}\right)$. Ainsi, $f(\ell) = 0$, où f est la fonction étudiée dans la première question.

Or f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et $f(0) = 0$. Donc $\ell = 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

18 Algorithmes de suites

On considère les fonctions Python suivantes :

```
def U(n):
    x=0
    for k in range(n):
        x=(1+x)**2/4
    return x
```

```
def V(n):
    x=1/2
    for k in range(n):
        x=np.sqrt(1+x**2)
    return x
```

Exprimer une relation de récurrence pour les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspondantes ainsi que leurs variations.

Corrigé

1. La fonction U initialise la variable x à 0, puis lui applique n fois la transformation $x \mapsto \frac{(1+x)^2}{4}$. Ainsi,

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{(1+u_n)^2}{4}.$$

Un calcul donne que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)^2}{4} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{4} \geq 0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante. (on pourrait démontrer qu'elle est strictement croissante)

2. La fonction V initialise la variable x à $\frac{1}{2}$, puis lui applique n fois la transformation $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Ainsi,

$$v_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \sqrt{1+v_n^2}.$$

On montre d'abord par récurrence rapide que $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$ (et avec la quantité conjuguée), $v_{n+1} - v_n = \frac{v_{n+1}^2 - v_n^2}{v_{n+1} + v_n} = \frac{1}{v_{n+1} + v_n} > 0$. Ainsi, la suite (v_n) est strictement croissante.

19 Moyenne arithmético-géométrique

On définit les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$b_0 > a_0 > 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Montrer que les deux suites sont bien définies et que $0 < a_n < b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que (b_n) est décroissante et minorée. En déduire qu'elle converge vers ℓ_1 .
3. Montrer que (a_n) est croissante et majorée. En déduire qu'elle converge vers ℓ_2 .
4. Démontrer que $\ell_1 = \ell_2$.

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : 0 < a_n < b_n$.
 - **Initialisation.** Par hypothèse, $0 < a_0 < b_0$. Donc $P(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 < a_n < b_n$. Alors $a_n b_n > 0$, donc a_{n+1} et b_{n+1} sont bien définis et strictement positifs.
De plus, puisque les deux termes sont positifs dans le passage au carré,

$$\sqrt{a_n b_n} < \frac{a_n + b_n}{2} \iff 4a_n b_n < (a_n + b_n)^2 \iff 0 < (a_n - b_n)^2, \text{ qui est vraie.}$$
Ainsi, $0 < a_{n+1} < b_{n+1}$, donc $P(n+1)$ est vraie.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $a_n < b_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{b_n + b_n}{2} = b_n$. Ainsi, la suite (b_n) est strictement décroissante. De plus, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$. Elle est donc minorée par 0.
Par le théorème de la limite monotone, la suite (b_n) converge vers un réel $\ell_1 \geq 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $0 < a_n < b_n$, on a $a_n^2 < a_n b_n$. Ainsi, $a_n < \sqrt{a_n b_n} = a_{n+1}$, donc la suite (a_n) est strictement croissante.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n \leq b_0$. Ainsi, la suite (a_n) est majorée par b_0 .
Par le théorème de la limite monotone, la suite (a_n) converge vers un réel ℓ_2 .
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. En passant à la limite et par continuité des fonctions usuelles, on obtient $\ell_1 = \frac{\ell_2 + \ell_1}{2}$. Ainsi, $2\ell_1 = \ell_1 + \ell_2$, donc $\ell_1 = \ell_2$.

20 Suite alternée

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire pour $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Corrigé

On a $S_0 = 0$, car c'est une somme vide.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} < 0$. Ainsi, la suite $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0$. Ainsi, la suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} > 0$. Donc $S_{2n+1} \leq S_{2n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = 0$.
Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. Par le théorème des suites adjacentes, les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ .

Par le cours, on en déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

21 Suite définie par récurrence

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $v_0 \geq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{v_n + 1}$.

1. Justifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Étudier f et montrer qu'elle admet un unique point fixe, noté ℓ .
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
4. On note $g = f \circ f$. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Quelle est sa monotonie ? En déduire que $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, puis convergente (on note sa limite ℓ_2).
5. Déterminer tous les points fixes de g , et en déduire que $\ell_2 = \ell$.
6. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: v_n est bien défini et $v_n \geq 0$.
 - **Initialisation.** Par hypothèse, $v_0 \geq 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que v_n est bien défini et $v_n \geq 0$. Alors $v_n + 1 > 0$, donc $v_{n+1} = \frac{1}{v_n + 1}$ est bien défini et strictement positif. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 Les points fixes de f sont les solutions dans $\mathbb{R}_+$ de $f(x) = x \iff \frac{1}{x+1} = x \iff x^2 + x - 1 = 0$.
 Les racines de cette équation sont $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. La première est strictement négative. Ainsi, f admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}_+$: $\ell = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $v_{n-1} \geq 0$, $0 < v_n = \frac{1}{v_{n-1} + 1} \leq 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq 1$.
 Donc la suite (v_n) est bornée.
4. On pose $g = f \circ f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x+2}$, et g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$. Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
 De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+2} = f(f(v_{2n})) = g(v_{2n})$. Or $v_2 - v_0 = g(v_0) - v_0 = \frac{1 - v_0 - v_0^2}{v_0 + 2}$.
 - Si $v_0 < \ell$, alors $v_2 > v_0$. Comme g est croissante, une récurrence immédiate montre que (v_{2n}) est strictement croissante.

- Si $v_0 = \ell$, alors $v_n = \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $v_0 > \ell$, alors $v_2 < v_0$. Comme g est croissante, une récurrence immédiate montre que (v_{2n}) est strictement décroissante.

Dans tous les cas, la suite (v_{2n}) est monotone. D'après la question précédente, elle est bornée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ_2 .

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = x \iff \frac{x+1}{x+2} = x \iff x^2 + x - 1 = 0$.

Ainsi, g admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}_+$, qui est $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+2} = g(v_{2n})$. En passant à la limite et par continuité de g , on obtient $\ell_2 = g(\ell_2)$. Ainsi, ℓ_2 est un point fixe de g , donc $\ell_2 = \ell$.

6. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = \ell$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+1} = f(v_{2n})$. Par continuité de f en ℓ ,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = f(\ell) = \ell$.

Les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) convergeant vers une même limite, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

• • • ○ 22 Série géométrique

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $\sum_{k=1}^n x_k^k = 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Montrer qu'elle est minorée par $\frac{1}{2}$.
4. Montrer qu'elle converge vers $\frac{1}{2}$.

Corrigé

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$.

La fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur cet intervalle. Pour tout $x \in [0, 1]$, $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} > 0$. Ainsi, f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$. De plus, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n \geq 1$.

Par le théorème de la bijection monotone, f_n réalise donc une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, n]$. Il existe donc un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + x_n^{n+1} = 1 + x_n^{n+1} > 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$.

Comme f_{n+1} est strictement croissante, on en déduit que $x_n > x_{n+1}$. Ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1 = f_n(x_n)$.

Comme f_n est strictement croissante, on a $x_n > \frac{1}{2}$. Ainsi, la suite (x_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.

4. La suite (x_n) est décroissante et minorée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \geq \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{2} < x_n < 1$. Par la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$1 = \sum_{k=1}^n x_n^k = \frac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n}.$$

Ainsi, $x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n$, donc $2x_n - 1 = x_n^{n+1}$.

Comme (x_n) est décroissante, pour tout $n \geq 2$, $0 < x_n \leq x_2 < 1$. Ainsi, $0 \leq x_n^{n+1} \leq x_2^{n+1}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{n+1} = 0$. On obtient donc, en passant à la limite dans l'égalité $2x_n - 1 = x_n^{n+1}$, $2\ell - 1 = 0$.

Ainsi, $\ell = \frac{1}{2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

• • • • 23 Suite récurrente d'ordre 3

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 2, u_1 = 0, u_2 = 7, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

On introduit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer MX_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire X_n en fonction de M et X_0 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la première ligne de M^n est donnée par

$$\left(\frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8), \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2), \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \right).$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$. Une récurrence immédiate donne alors $X_n = M^n X_0$ avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : \quad \text{la première ligne de } M^n \text{ est } \left(\frac{(-2)^n - 6n + 8}{9}, \frac{(-2)^{n+1} + 3n + 2}{9}, \frac{(-2)^n + 3n - 1}{9} \right).$$

- **Initialisation.** On a $M^0 = I_3$. De plus,

$$\left(\frac{1+8}{9}, \frac{-2+2}{9}, \frac{1-1}{9} \right) = (1, 0, 0).$$

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On note (a_n, b_n, c_n) la première ligne de M^n . La première ligne de $M^{n+1} = M^n M$ est alors

$$(a_n, b_n, c_n)M = (-2c_n, a_n + 3c_n, b_n).$$

Or

$$-2c_n = -\frac{2}{9}((-2)^n + 3n - 1) = \frac{(-2)^{n+1} - 6(n+1) + 8}{9},$$

$$a_n + 3c_n = \frac{(-2)^n - 6n + 8 + 3((-2)^n + 3n - 1)}{9} = \frac{(-2)^{n+2} + 3(n+1) + 2}{9},$$

$$\text{et } b_n = \frac{(-2)^{n+1} + 3(n+1) - 1}{9}.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la première ligne de M^n est

$$\left(\frac{(-2)^n - 6n + 8}{9}, \frac{(-2)^{n+1} + 3n + 2}{9}, \frac{(-2)^n + 3n - 1}{9} \right).$$

3. D'après la première question, $X_n = M^n X_0$. Le terme u_n est donc le produit de la première ligne de M^n par X_0 . Ainsi, $u_n = \frac{2}{9}((-2)^n - 6n + 8) + \frac{7}{9}((-2)^n + 3n - 1) = (-2)^n + n + 1$.

24 ECRICOME 2016 ECE – Exercice 1

On souhaite étudier les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n, \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n, \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Que vaut X_0 ?
2. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n.$$

On pourra poser $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, puis identifier les coefficients

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.
4. Démontrer que $C = PDP^{-1}$, avec

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admettra que $PP^{-1} = I_3$.

5. Démontrer par récurrence que $C^n = PD^nP^{-1}$.
6. Pour $n \geq 1$, en déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n .

Corrigé

1. D'après les conditions initiales, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après les relations de récurrence, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n - c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{pmatrix}$.

Ainsi, en identifiant les coefficients (en posant $a, b, c, \dots$), on obtient $X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = CX_n$, avec $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : X_n = C^n X_0$.

- **Initialisation.** On a $C^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $X_n = C^n X_0$.

Alors, d'après la question précédente, $X_{n+1} = CX_n = CC^n X_0 = C^{n+1} X_0$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

4. De plus,

$$PD = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} = C.$$

Ainsi, $C = PDP^{-1}$.

5. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n = PD^n P^{-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : C^n = PD^n P^{-1}$.

- **Initialisation.** On a $C^0 = I_3$.

De plus, $PD^0 P^{-1} = PI_3 P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ par définition de l'inverse. Donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $C^n = PD^n P^{-1}$.

Alors, d'après la question précédente,

$$C^{n+1} = C^n C = (PD^n P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n (P^{-1}P) DP^{-1} = PD^n I_3 DP^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

6. D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0$.

$$\text{Or, } P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} X_n &= PD^n P^{-1} X_0 \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2(-1)^n \\ 3(-1)^n - 1 \\ 4(-1)^n - 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{cases} a_n = 1 - 2(-1)^n, \\ b_n = 3(-1)^n - 1, \\ c_n = 4(-1)^n - 2. \end{cases}$$

• • • ○ 25 Équation $e^x = x + n$

Le but de l'exercice est d'étudier les solutions de l'équation $e^x = x + n$ (pour $x \in \mathbb{R}$) et leur comportement lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Réaliser une étude complète de la fonction $f : x \mapsto e^x - x$. (On précisera le domaine de définition, le tableau de variation, les limites et on donnera l'allure du graphe.)
2. On fixe un entier $n \geq 2$. Dédurre de la question précédente que l'équation $e^x = x + n$ admet exactement deux solutions, que l'on note x_n et y_n , avec $x_n < y_n$.
3. Démontrer que les suites $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ sont monotones, et déterminer leurs limites respectives.

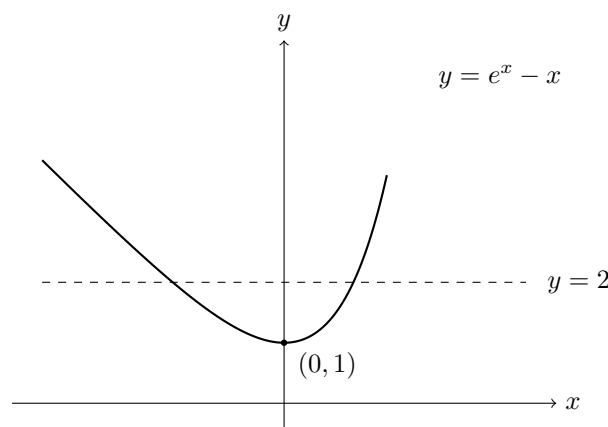
Corrigé

1. La fonction $f : x \mapsto e^x - x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. f' est donc du signe de x .

De plus, $f(0) = 1$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par limites usuelles et croissance comparée pour la limite en $+\infty$. On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

On peut représenter l'allure du graphe de la façon suivante :



2. Soit $n \geq 2$. Résoudre l'équation $e^x = x + n$ revient à résoudre $f(x) = n$.

Or $n \geq 2 > 1$, et la fonction f admet un minimum égal à 1 en 0. Puisque f est continue, et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, en appliquant deux fois le théorème de la bijection monotone, on trouve qu'il y a exactement deux solutions à l'équation $f(x) = n$: l'une sur $] -\infty, 0[$, notée x_n , et l'autre sur $]0, +\infty[$, notée y_n . On a donc $x_n < 0 < y_n$.

3. Montrons d'abord que $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante. Soit $n \geq 2$. On a $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$. Or x_n et x_{n+1} appartiennent à $] -\infty, 0[$, et f est strictement décroissante sur cet intervalle. Donc $x_{n+1} < x_n$. Ainsi, $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

Montrons maintenant que $(y_n)_{n \geq 2}$ est croissante. Soit $n \geq 2$. On a $f(y_{n+1}) = n+1 > n = f(y_n)$. Or y_n et y_{n+1} appartiennent à $]0, +\infty[$, et f est strictement croissante sur cet intervalle. Donc $y_{n+1} > y_n$. Ainsi, $(y_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

Déterminons leurs limites.

Comme (x_n) est décroissante, elle admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ . Par continuité de f , $f(x_n) \rightarrow f(\ell)$. Or $f(x_n) = n \rightarrow +\infty$, ce qui est impossible. Donc (x_n) ne converge pas vers un réel, et l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$.

De même, comme (y_n) est croissante, elle admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ' . Par continuité de f , $f(y_n) \rightarrow f(\ell')$. Or $f(y_n) = n \rightarrow +\infty$, ce qui est impossible. Donc (y_n) ne converge pas vers un réel, et l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$.

26 Suites définies par $x - n \ln x$

Pour tout entier $n \geq 3$, on note $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - n \ln x$.

- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n , avec $u_n < v_n$. Vérifier que $0 < u_n < n < v_n$ pour tout $n \geq 3$.
- Donner la limite de la suite (v_n) .
- Montrer que pour tout $n \geq 3$, $1 < u_n < e$.
 - Montrer que pour tout $n \geq 3$, $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n \geq 3}$.
 - Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente, puis en encadrant u_n , établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Corrigé

1. Soit $n \geq 3$. La fonction f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur $]0, n]$, puis strictement croissante sur $[n, +\infty[$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$, $f_n(n) = n(1 - \ln n) < 0$ car $n \geq 3 > e$, et, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
Par le théorème de la bijection monotone, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une solution u_n dans $]0, n[$ et exactement une solution v_n dans $[n, +\infty[$. Ainsi, $0 < u_n < n < v_n$.
2. Pour tout $n \geq 3$, $v_n > n$. Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
3. (a) Pour tout $n \geq 3$, $f_n(1) = 1 > 0$ et $f_n(e) = e - n < 0$. De plus, $1 < e < n$ et f_n est strictement décroissante sur $]0, n]$, et y est continue. Par le théorème des valeurs intermédiaires et par la question 1, $1 < u_n < e$.
(b) Comme $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a $u_{n+1} - (n+1) \ln(u_{n+1}) = 0$. Ainsi, $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n \ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
Or $u_{n+1} > 1$, donc $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$.
De plus, $u_n, u_{n+1} \in]1, e[\subset]0, n[$ et f_n est strictement décroissante sur $]0, n]$. Ainsi, $u_{n+1} < u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante.
(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Par le théorème de la limite monotone, elle converge.
Pour tout $n \geq 3$, comme $f_n(u_n) = 0$, $u_n = n \ln(u_n)$, donc $u_n = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right)$. Or $1 < u_n < e$, donc $1 < u_n < \exp\left(\frac{e}{n}\right)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{e}{n}\right) = 1$, on en déduit par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

• • • • 27 Équation $x + \ln(x) = n$

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer que f est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ possède une unique solution, que l'on notera x_n .
(b) Étudier la monotonie et la convergence de la suite (x_n) .
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comparer $f(n)$ et n . En déduire que $x_n \leq n$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \ln(n) \leq x_n \leq n$.
(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$.

Corrigé

1. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Par le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question 1, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in]0, +\infty[$.

-
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_{n+1}) = n + 1 > n = f(x_n)$. Comme f est strictement croissante, on en déduit que $x_{n+1} > x_n$. Ainsi, la suite (x_n) est strictement croissante.

Elle admet donc une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons qu'elle converge vers un réel $\ell > 0$. Par continuité de f , $f(x_n) \rightarrow f(\ell)$. Or $f(x_n) = n \rightarrow +\infty$, ce qui est impossible. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = n + \ln(n) \geq n$. Or $f(x_n) = n$. Comme f est strictement croissante, on en déduit que $x_n \leq n$.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n - \ln(n)) = n - \ln(n) + \ln(n - \ln(n)) \leq n$ par croissance du logarithme. Donc, $x_n \geq n - \ln(n)$.
- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq 1$. Par croissance comparée et par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

28 Problème

On s'intéresse dans ce problème à l'ensemble $\mathcal{S}$ constitué de toutes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} (u_n^2 + u_{n+1}^2), \quad u_0 \geq 0 \text{ et } u_1 \geq 0.$$

Si (x, y) est un couple de réels positifs, on notera $(u_n(x, y))$ la suite appartenant à $\mathcal{S}$ et vérifiant $u_0(x, y) = x$ et $u_1(x, y) = y$.

Pour tout réel A , on notera

$$E_A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid (u_n(x, y)) \text{ converge vers } A\}.$$

On notera également $E_{+\infty} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid (u_n(x, y)) \text{ diverge vers } +\infty\}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n(1, 0))$.
2. (a) Déterminer toutes les suites constantes appartenant à $\mathcal{S}$.
(b) Montrer que, si une suite dans $\mathcal{S}$ a deux termes consécutifs égaux à 1, alors elle est constante.
(c) Que peut-on dire d'une suite de $\mathcal{S}$ ayant un terme nul autre que les deux premiers ?
3. On suppose qu'une suite de $\mathcal{S}$ admet une limite finie L . En passant à la limite dans la relation de récurrence, déterminer les valeurs possibles de L .
4. Soient a et b deux réels quelconques.
(a) Montrer que, si $0 \leq a \leq b \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, alors $b \geq 1$ ou $a = b = 0$.
(b) Montrer que, si $\frac{a^2+b^2}{2} \leq a \leq b$, alors $b \leq 1$.
5. Comparer le signe de $u_{n+3} - u_{n+2}$ et celui de $u_{n+2} - u_n$, pour une suite appartenant à $\mathcal{S}$.
6. On suppose dans cette question que la suite (u_n) (appartenant à $\mathcal{S}$) vérifie la condition suivante : pour un certain entier n , on a $u_{n+2} \geq u_n$ et $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. On suppose aussi que $u_0 \neq 0$.
(a) Montrer que $u_{n+3} \geq u_{n+2} \geq u_{n+1}$.
(b) Dédire que (u_n) est croissante à partir du rang $n+2$, puis strictement croissante ou constante à partir du rang $n+3$.
(c) Montrer que $u_{n+2} \geq 1$.
(d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ ou que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
7. On suppose dans cette question que $u_{n+2} \leq u_n$ et que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Montrer en procédant comme dans la question précédente que (u_n) est constante ou que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
8. Quelles sont les limites de la suite $(u_n(2, 0))$ et de la suite $(u_n(\sqrt{2}, 0))$?
9. On suppose que la suite (u_n) appartenant à $\mathcal{S}$ n'a pas pour limite 0, ni $+\infty$, et qu'elle n'est pas constante.
(a) Montrer que $u_0 \neq u_1$.
(b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que u_{n+2} est compris entre u_n et u_{n+1} .
(c) On suppose $u_0 \leq u_1$. Démontrer que (u_{2n}) est croissante, et que (u_{2n+1}) est décroissante. Démontrer maintenant que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.
(d) On obtient la même conclusion pour $u_0 \geq u_1$. Dédire que tout couple de réels positifs (x, y) appartient soit à E_0 , soit à E_1 , soit à $E_{+\infty}$.

Corrigé

1. $u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{8}, u_4 = \frac{17}{128}$.
2. (a) Soit $(u_n) \in \mathcal{S}$. Si u_n est constante, on a $u_2 = u_1 = u_0$, et donc $\frac{1}{2}(u_0^2 + u_0^2) = u_0$, soit $u_0 = u_0^2$. Donc, $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$. Réciproquement, on vérifie aisément que $(u_n(0, 0))$ et $(u_n(1, 1))$ sont constantes.
(b) On suppose qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N_0} = u_{N_0+1} = 1$. Par récurrence rapide, pour tout $n \geq N_0$, $u_n = 1$. On note maintenant $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n, u_m = 1\}$. On suppose par l'absurde que $n_0 > 0$. On a alors $u_{n_0-1} \neq 1$, et $u_{n_0} = u_{n_0+1} = 1$.
Donc, puisque $u_n = \sqrt{2u_{n+2} - u_{n+1}^2}$, on a $u_{n_0-1} = \sqrt{2u_{n_0+1} - u_{n_0}^2} = \sqrt{2-1} = 1$. Contradiction. La suite est donc constante égale à 1.
(c) Si $u_N = 0$ avec $N \geq 2$, on a alors $u_{N-1}^2 + u_{N-2}^2 = 0$, soit $u_{N-1} = 0$ et $u_{N-2} = 0$. De proche en proche (avec une rédaction similaire à celle ci-dessus si-besoin), on a $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $L = L^2$, soit $L = 0$ ou $L = 1$.
4. (a) On suppose $b < 1$. Alors, $b^2 \leq b$ et $a^2 \leq b$. Donc, $b \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ donc que $b^2 = b$ et $a^2 = b$. L'équation $b^2 = b$ donne $b = 0$, puisque $b < 1$. Donc $a = 0$.
(b) On prend $b > 0$. On suppose par l'absurde que $b > 1$. On a alors que $a > 0$, puisque $a > \frac{b^2}{2}$. De plus, $ab > a \geq \frac{a^2 + b^2}{2}$ Donc, $ab - \frac{a^2 + b^2}{2} > 0$ et $-\frac{1}{2}(a - b)^2 > 0$: contradiction.
5. On a
$$u_{n+3} - u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 - u_n^2) = \frac{1}{2}(u_{n+2} - u_n)(u_{n+2} + u_n).$$
Donc, $u_{n+3} - u_{n+2}$ est du signe de $u_{n+2} - u_n$.
6. (a) Par la question précédente, on déduit que $u_{n+3} \geq u_{n+2}$. D'où l'inégalité recherchée
(b) On déduit la croissance de la suite à partir du rang $n + 1$ en appliquant le raisonnement de la question 6.(a). Ensuite, on disjoint deux cas :
 - Si $u_{n+2} > u_n$, alors $u_{n+3} - u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+2} - u_n)(u_{n+2} + u_n) > 0$. Donc, $u_{n+3} > u_{n+2}$ et $u_{n+3} > u_{n+1}$ par la question précédente. En itérant, on trouve que la suite est strictement croissante.
 - Si $u_n = u_{n+2}$, alors $u_{n+3} = u_{n+2}$ par le calcul ci-dessus. Si $u_{n+1} = u_n$, alors la suite est constante car elle a trois termes successifs constants. Sinon, si $u_{n+1} < u_{n+2}$, alors $u_{n+4} = \frac{1}{2}(u_{n+3}^2 + u_{n+2}^2) > \frac{1}{2}(u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2) = u_{n+3}$. Donc, $u_{n+4} > u_{n+3}$ et $u_{n+4} > u_{n+2}$: la suite est donc strictement croissante par le point précédent.
(c) On a, par la question 6.(a), $u_{n+3} \geq u_{n+2} \geq u_{n+1}$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2)$. Par la question 4.(a), on en déduit que $u_{n+2} \geq 1$, puisqu'on ne peut avoir $u_{n+1} = u_{n+2} = 0$, sinon la suite serait constante nulle par la question 2.(c).
(d) Par la question 6.(b), on a deux cas :
 - Ou alors la suite est constante
 - Ou alors elle est strictement croissante et $u_{n+2} \geq 1$. Elle converge donc vers une limite finie L ou vers $+\infty$. Par l'absurde, si elle converge, alors $L = 0$ (impossible car $L \geq 1$) ou $L = 1$ par la question 2.(c). Or, si $L = 1$, alors la suite est constante puisque croissante et de limite u_{n+2} . Donc, la limite vaut l'infini.
7. On va prouver plusieurs points :
 - Tout d'abord, la 4.(b) nous donne que $u_n \leq 1$ et que $u_{n+1} \leq 1$.

-
- Ensuite, on utilise la question 5. pour démontrer que $u_{n+3} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Donc, la suite est décroissante.
 - Donc, la suite converge vers une limite L . Donc, $L = 0$ ou 1 par la question 3. Si $L = 1$, alors puisque $u_n \leq 1$ et que la suite est décroissante à partir d'un certain rang, on en déduit que la suite est constante égale à 1 . Sinon, elle tend vers 0 .
8. $u_2(2, 0) = 2$, $u_3(2, 0) = 2$. Par la question 6., $(u_n(2, 0))$ diverge vers $+\infty$ car $u_1 < u_3$ et $u_2 \leq u_3$ (donc la suite n'est pas constante).
- $u_2(\sqrt{2}, 0) = 1$, $u_3(\sqrt{2}, 0) = \frac{1}{2}$, $u_4(\sqrt{2}, 0) = \frac{5}{8}$ et $u_5(\sqrt{2}, 0) = \frac{41}{128}$. On a donc que la suite tend vers 0 , puisque $u_5(\sqrt{2}, 0) < u_3(\sqrt{2}, 0)$ et $u_5(\sqrt{2}, 0) < u_4(\sqrt{2}, 0)$.
9. (a) Si $u_0 = u_1$, on a nécessairement $u_2 \leq u_0$ ou $u_2 \geq u_0$, et on est dans le cas de la question 6 ou 7, donc la suite est constante ou a pour limite 0 ou $+\infty$. Ce n'est pas possible. Donc, $u_0 \neq u_1$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ et $u_{n+2} \geq u_n$, alors on est dans le cas de la question 6 : impossible. De même si $u_{n+2} \leq u_n$ et $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Donc, u_{n+2} est compris entre u_n et u_{n+1} .
- (c) On démontre par récurrence que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$.
- **Initialisation.** Par hypothèse et par la question précédente, $u_0 \leq u_2 \leq u_1$, et donc $u_2 \leq u_3 \leq u_1$.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Puisque $u_{2n+4} \in [u_{2n+2}, u_{2n+3}]$, on a donc $u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+3}$. Avec le même argument, on obtient $u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3}$. D'où $P(n+1)$.
- On en déduit que (u_{2n}) est croissante, et que (u_{2n+1}) est décroissante.
- Donc, les deux suites convergent, l'une étant minorée par 0 et l'autre par u_1 . On note L et L' les deux limites. Par passage à la limite, on a donc $L = \frac{L^2 + L'^2}{2}$ et $L' = \frac{L^2 + L'^2}{2}$. Donc, $L' = L$, et, par la question 3., $L = 1$ car la suite n'a pas pour limite 0 .
- (d) Soit $(u_n) \in \mathcal{S}$.
- Si elle est constante, elle est constante égale à 0 ou à 1 . Si elle vérifie à un certain rang les hypothèses de la question 6, elle est constante ou tend vers $+\infty$. Si elle vérifie à un certain rang les hypothèses de la question 7, elle est constante ou tend vers 0 . Dans les autres cas, la question 9 montre qu'elle converge vers 1 .
- Ainsi, $(\mathbb{R}_+)^2 = E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty}$.