
1 Coût d'un emprunt bancaire

Un couple s'apprête à acheter un bien, et doit emprunter à la banque. Le bien coûte p euros, et le couple souhaite emprunter sur m années à un taux d'intérêt annuel i . (Par exemple, actuellement, $i = 3,5/100$ en moyenne). L'objectif de cet exercice est de déterminer la somme que le couple paiera au total, et quelle est la mensualité r .

Le fonctionnement de la banque est le suivant. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où v_n est le montant à rembourser au bout de n mois. Chaque mois, si le couple donne r euros à la banque, une partie de ces r euros sert tout d'abord à payer les intérêts mensuels, puis le reste contribue à rembourser le capital à rembourser.

1. Justifier que $v_{n+1} = v_n(1 + i/12) - r$.
2. On note $q = 1 + i/12$. Déterminer une expression de v_n en fonction de n , de r et q .
3. Déterminer maintenant r en fonction de m .
4. Calculer l'argent total que le couple paiera pour son bien.

2 Suite arithmétique et géométrique

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n, \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est géométrique. En déduire une expression de $u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{v_n}{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique, et en déduire une expression de w_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression explicite de u_n et v_n , en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3 Exercice

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 3^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{3^n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique et en déduire l'expression explicite de u_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 Suite arithmético-géométrique

Pour chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes, déterminer une expression explicite de u_n , étudier la limite de (u_n) .

1. $\begin{cases} u_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$

$$3. \begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2(u_n)^2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, u_1 = \frac{1}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{3}{u_{n+1}} - \frac{2}{u_n}. \end{cases}$$

5 Suite auxiliaire

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n - 1)$. Déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire u_n .

6 Exercice

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1, v_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. En déduire que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. Calculer alors u_n et v_n en fonction de n .

7 Suite récurrente d'ordre 3

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_0 = 3, x_1 = 2, x_2 = 6, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = x_{n+1} - x_n$. Déterminer une relation entre v_{n+2} , v_{n+1} et v_n . Calculer également v_0 et v_1 .
2. Déterminer v_n en fonction de n . En déduire x_n en fonction de n . *Indice en bas de la page, à ne regarder que si vous avez passé plus de 10 minutes sur le passage de v_n à x_n* ¹

8 Monotonie

Déterminer la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = n^2 - 2n$, pour tout $n \geq 1$.
2. $u_n = \frac{n^2}{n!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

¹On pourra utiliser que $x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) + x_0$

3. $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. $u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. $u_n = \binom{n}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $k \in \mathbb{N}^*$ est un entier fixé.

● ● ● ○ 9 Manipulation de la définition de limite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ . Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

● ● ● ○ 10 Manipulation de la définition de limite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de période $N \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+N} = u_n$. On suppose de plus que (u_n) converge vers l . Démontrer que u_n est constante.

● ● ● ○ 11 Manipulation de la définition de limite

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

● ● ○ ○ 12 A MAITRISER : Suites récurrentes avec le sinus

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$. En déduire le sens de variation de (u_n) .
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.
4. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\sin(x) < x$.
5. En déduire par un raisonnement par l'absurde que $u_n \rightarrow 0$.

● ● ○ ○ 13 A MAITRISER : Suites récurrentes avec l'arctangente

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\arctan(x) \leq x$. En déduire le sens de variation de (u_n) .
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.
4. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\arctan(x) < x$.
5. En déduire par un raisonnement par l'absurde que $u_n \rightarrow 0$.

14 Suites à analyser

Déterminer le comportement asymptotique (convergence/divergence, limite si possible) des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

a. $u_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$

j. $u_n = \frac{3n+1}{2n^2-1}$

b. $u_n = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$

k. $u_n = \frac{2n^2+3n+1}{5n^2+4n-2}$

c. $u_n = \frac{((-1)^n + n^3)e^{-n}}{((-1)^n + e^{-n})n^3}$

l. $u_n = \frac{\ln^2(n) - 2}{\ln(n) + n}$

d. $u_n = (\cos(n) + 3)\ln(n)$

e. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

m. $u_n = \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n) - 3}{n+3}$

f. $u_n = \frac{2^n}{n!}$

n. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, où $0 < a < b$

g. $u_n = \frac{n!}{n^n}$

o. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$

h. $u_n = \left\lfloor \frac{3}{n} + 1 \right\rfloor$

p. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

i. $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$, $x \in \mathbb{R}$

15 Comparaison de limites

Comparer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right)^n, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n.$$

16 Suite récurrente bornée

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'on a $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

17 Suite trigonométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2 \sin\left(\frac{u_n}{2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq x$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

18 Algorithmes de suites

On considère les fonctions Python suivantes :

```
def U(n):
    x=0
    for k in range(n):
        x=(1+x)**2/4
    return x
```

```
def V(n):
    x=1/2
    for k in range(n):
        x=np.sqrt(1+x**2)
    return x
```

Exprimer une relation de récurrence pour les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspondantes ainsi que leurs variations.

19 Moyenne arithmético-géométrique

On définit les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$b_0 > a_0 > 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Montrer que les deux suites sont bien définies et que $0 < a_n < b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (b_n) est décroissante et minorée. En déduire qu'elle converge vers ℓ_1 .
3. Montrer que (a_n) est croissante et majorée. En déduire qu'elle converge vers ℓ_2 .
4. Démontrer que $\ell_1 = \ell_2$.

20 Suite alternée

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire pour $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

21 Suite définie par récurrence

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $v_0 \geq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{v_n + 1}$.

1. Justifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Étudier f et montrer qu'elle admet un unique point fixe, noté ℓ .
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
4. On note $g = f \circ f$. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Quelle est sa monotonie ? En déduire que $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, puis convergente (on note sa limite ℓ_2).
5. Déterminer tous les points fixes de g , et en déduire que $\ell_2 = \ell$.
6. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

22 Série géométrique

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $\sum_{k=1}^n x_n^k = 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Montrer qu'elle est minorée par $\frac{1}{2}$
4. Montrer qu'elle converge vers $\frac{1}{2}$

23 Suite récurrente d'ordre 3

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 7, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

On introduit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer MX_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire X_n en fonction de M et X_0 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la première ligne de M^n est donnée par

$$\left(\frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8), \quad \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2), \quad \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \right).$$

3. Pour $n \geq 1$, en déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n .

24 ECRICOME 2016 ECE – Exercice 1

On souhaite étudier les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n, \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n, \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Que vaut X_0 ?
2. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n.$$

On pourra poser $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, puis identifier les coefficients

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

4. Démontrer que $C = PDP^{-1}$, avec

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admettra que $PP^{-1} = I_3$. (Vous pouvez le prouver, cela dit, ce n'est jamais perdu)

5. Démontrer par récurrence que $C^n = PD^nP^{-1}$.

6. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n .

• • • ○ 25 Équation $e^x = x + n$

Le but de l'exercice est d'étudier les solutions de l'équation $e^x = x + n$ (pour $x \in \mathbb{R}$) et leur comportement lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Réaliser une étude complète de la fonction $f : x \mapsto e^x - x$. (On précisera le domaine de définition, le tableau de variation, les limites et on donnera l'allure du graphe.)
2. On fixe un entier $n \geq 2$. Déduire de la question précédente que l'équation $e^x = x + n$ admet exactement deux solutions, que l'on note x_n et y_n , avec $x_n < y_n$.
3. Démontrer que les suites $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ sont monotones, et déterminer leurs limites respectives.

• • • ○ 26 Suites définies par $x - n \ln x$

Pour tout entier $n \geq 3$, on note $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - n \ln x$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n , avec $u_n < v_n$. Vérifier que $0 < u_n < n < v_n$ pour tout $n \geq 3$.
2. Donner la limite de la suite (v_n) .
3. (a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $1 < u_n < e$.
(b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n \geq 3}$.
(c) Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente, puis en encadrant u_n , établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

• • • ○ 27 Équation $x + \ln(x) = n$

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer que f est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ possède une unique solution, que l'on notera x_n .
(b) Étudier la monotonie et la convergence de la suite (x_n) .
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comparer $f(n)$ et n . En déduire que $x_n \leq n$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \ln(n) \leq x_n \leq n$.
(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$.

• • • • 28 Problème (vieux sujet de Bac)

On s'intéresse dans ce problème à l'ensemble $\mathcal{S}$ constitué de toutes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} (u_n^2 + u_{n+1}^2), \quad u_0 \geq 0 \text{ et } u_1 \geq 0.$$

Si (x, y) est un couple de réels positifs, on notera $(u_n(x, y))$ la suite appartenant à $\mathcal{S}$ et vérifiant $u_0(x, y) = x$ et $u_1(x, y) = y$.

Pour tout réel A , on notera

$$E_A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid (u_n(x, y)) \text{ converge vers } A\}.$$

On notera également $E_{+\infty} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid (u_n(x, y)) \text{ diverge vers } +\infty\}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n(1, 0))$.
2. (a) Déterminer toutes les suites constantes appartenant à $\mathcal{S}$.
(b) Montrer que, si une suite dans $\mathcal{S}$ a deux termes consécutifs égaux à 1, alors elle est constante.
(c) Que peut-on dire d'une suite de $\mathcal{S}$ ayant un terme nul autre que les deux premiers ?
3. On suppose qu'une suite de $\mathcal{S}$ admet une limite finie L . En passant à la limite dans la relation de récurrence, déterminer les valeurs possibles de L .
4. Soient a et b deux réels quelconques.
(a) Montrer que, si $0 \leq a \leq b \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, alors $b \geq 1$ ou $a = b = 0$.
(b) Montrer que, si $\frac{a^2+b^2}{2} \leq a \leq b$, alors $b \leq 1$.
5. Comparer le signe de $u_{n+3} - u_{n+2}$ et celui de $u_{n+2} - u_n$, pour une suite appartenant à $\mathcal{S}$.
6. On suppose dans cette question que la suite (u_n) (appartenant à $\mathcal{S}$) vérifie la condition suivante : pour un certain entier n , on a $u_{n+2} \geq u_n$ et $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. On suppose aussi que $u_0 \neq 0$.
(a) Montrer que $u_{n+3} \geq u_{n+2} \geq u_{n+1}$.
(b) Dédire que (u_n) est croissante à partir du rang $n+1$, puis strictement croissante ou constante à partir du rang $n+3$.
(c) Montrer que $u_{n+2} \geq 1$.
(d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ ou que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
7. On suppose dans cette question que $u_{n+2} \leq u_n$ et que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Montrer en procédant comme dans la question précédente que (u_n) est constante ou que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
8. Quelles sont les limites de la suite $(u_n(2, 0))$ et de la suite $(u_n(\sqrt{2}, 0))$?
9. On suppose que la suite (u_n) appartenant à $\mathcal{S}$ n'a pas pour limite 0, ni $+\infty$, et qu'elle n'est pas constante.
(a) Montrer que $u_0 \neq u_1$.
(b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que u_{n+2} est compris entre u_n et u_{n+1} .
(c) On suppose $u_0 \leq u_1$. Démontrer que (u_{2n}) est croissante, et que (u_{2n+1}) est décroissante. Démontrer maintenant que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.
(d) On obtient la même conclusion pour $u_0 \geq u_1$. Dédire que tout couple de réels positifs (x, y) appartient soit à E_0 , soit à E_1 , soit à $E_{+\infty}$.