

Interrogation de cours – 1

NOM :

Prénom :

0. Cours

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x)$
2. Exprimer $\arctan(-x)$ en fonction de $\arctan(x)$
3. Valeur de $\arctan(1)$?
4. Valeur de $\tan(\pi/4)$?
5. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x)$
6. $\arctan'(x) =$
7. Donner les deux formules de la dérivée de la tangente.

1. Des inégalités

Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

2. Matrice

On note $J = (1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice composée uniquement de 1. Calculer J^2 .

Exercice – ECRICOME ECE 2001

Le but de cet exercice est de calculer les puissances successives de la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix},$$

où a représente un nombre réel.

1. Montrer que, pour tous réels a et b , $M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer son inverse.
3. Déterminer le réel a_0 non nul tel que $(M(a_0))^2 = M(a_0)$.
4. On considère les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_3 - P$.
 - (a) Montrer qu'il existe un réel α , que l'on exprimera en fonction de a , tel que $M(a) = P + \alpha Q$.
 - (b) Calculer P^2 , QP , PQ et Q^2 .
 - (c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que $(M(a))^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de P et Q .
(Cela signifie : montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $M(a)^n = u_n P + v_n Q$.)
 - (d) Expliciter alors la matrice $(M(a))^n$.