On va parler d'ensemble : bienvenue dans quelque chose de plus théorique !

1 Ensembles

1.1 Différentes descriptions d'un ensemble

Définition:

Un *ensemble* est une collection ou un groupement d'objets, qu'on appelle les *éléments de l'ensemble*.
Notation : si E est un ensemble, on note $x \in E$ si x est un élément de E et $x \notin E$ si x ne l'est pas.

Pour définir un ensemble, on distingue trois manières bien distinctes de procéder.

— **Définition en extension :** on énumère tous les éléments de l'ensemble :

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

On s'autorise aussi parfois à n'écrire que le début de l'énumération des éléments lorsque la suite se comprend implicitement. Bon, faut éviter quand même.

Exemples :

$$A = \{1, 3, 4, 6, 9\}, \quad B = \{3, 6, 9, \dots\}, \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

— **Définition en compréhension :** on sélectionne dans un ensemble plus gros les éléments vérifiant une certaine propriété :

$$E = \{x \in F,\ P(x)\}.$$

Exemples :

$$P = \{n \in \mathbb{N},\ n \text{ est pair}\}, \quad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}.$$

— **Définition en paramétrisation :** on décrit l'ensemble comme ensemble image d'une fonction sur un ensemble A donné :

$$E = \{f(x),\ x \in A\} = f(A).$$

Exemples :

$$P = \{2k+,\ k \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 1.

1. Écrire C en compréhension, et P en compréhension.
2. Écrire $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ en compréhension, puis en paramétrisation.

Remarque:

— L'ensemble ne contenant aucun élément s'appelle l'*ensemble vide* et est noté $\varnothing$.
— Un ensemble ne contenant qu'un seul élément s'appelle un *singleton* et est noté $\{x\}$.

Méthode: Montrer une inclusion entre deux ensembles

Pour montrer que $A \subset B$, on écrit : *Soit $x \in A$, montrons que $x \in B$.*
(...)

Ainsi, $x \in B$. Par conséquent, on a $A \subset B$.

On aura alors montré que la proposition « $\forall x \in A,\ x \in B$ » est vraie, c'est-à-dire $A \subset B$.

Exercice 2. Montrer que $A = \{x \in \mathbb{R},\ x^4 = 4x - 2\} \subset \mathbb{R}_+$.
Solution. Soit $x \in A$. On sait alors que $x^4 = 4x - 2$, donc $x = \frac{1}{4}(x^4 + 2)$. Puisque $x^4 \geq 0$, nous en déduisons que $x \geq 0$, i.e. $x \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, $A \subset \mathbb{R}_+$.

Définition: Égalité de deux ensembles

On dit que deux ensembles A et B sont égaux, et on note $A = B$, si tout élément de A appartient à B et réciproquement :

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Autrement dit,

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Méthode: Montrer que deux ensembles sont égaux

On montre d'abord que $A \subset B$, puis que $B \subset A$. On dit qu'on procède par double inclusion.

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y\}$.

Solution. On note $A = \{x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y\}$. Montrons que $\mathbb{R}_- = A$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Si $y \in \mathbb{R}_+$, on a $y \geq 0$, donc $x \leq 0 \leq y$, et ainsi $x \leq y$. On a donc $x \in A$. On a donc $\mathbb{R}_- \subset A$.

• Soit $x \in A$. C'est-à-dire que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a $x \leq y$. En prenant $y = 0$, on obtient que $x \leq 0$, donc $x \in \mathbb{R}_-$. On a donc montré que $A \subset \mathbb{R}_-$.

Finalement, on a montré par double inclusion que $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y\}$.

Définition: Ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles inclus dans E :

$$\mathcal{P}(E) = \{A,\ A \subset E\}.$$

Ainsi, $A \in \mathcal{P}(E)$ si et seulement si $A \subset E$.

Exemples.

1. $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.
2. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Alors

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Remarque:

— L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.

— (*Hors-programme*) : on peut démontrer qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles. Ceci peut se démontrer en ayant recours à un argument dit *paradoxe de Russell*.
En effet, supposons qu'il existe un ensemble qui contienne tous les ensembles (qu'on notera E), et considérons l'ensemble

$$A = \{B \in E,\ B \notin B\}.$$

Alors on aboutit à une contradiction en se demandant si $A \in A$:
— Si $A \in A$, alors d'après la définition de A, on a $A \notin A$, ce qui est impossible.
— Si $A \notin A$, alors par définition de A, on a $A \in A$, ce qui est impossible également.
Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.

Remarque:

— Pour tout ensemble A, on a $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
— Si A et B sont deux ensembles, on a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, et $A \subset A \cup B$.

Exemple. Si $A =]-1, 3]$ et $B =]0, 7[$, alors

$$A \cup B =]-1, 7[\quad \text{et} \quad A \cap B =]0, 3].$$

Proposition: Propriétés de l'intersection et de la réunion

Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E.

- **Commutativité :** $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
- **Associativité :** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- **Distributivité :** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- **Lien avec l'inclusion :**

$$A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A.$$

- **Élément neutre :** $A \cup \varnothing = A$ et $A \cap E = A$.

Démonstration. Nous montrons seulement le lien avec l'inclusion, les autres propriétés étant vérifiées directement. Il s'agit de montrer les implications suivantes :

$\diamond$ $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$: Supposons que $A \subset B$. On sait qu'on a toujours $B \subset A \cup B$, donc il s'agit de montrer que $A \cup B \subset B$. Si $x \in A \cup B$, alors : - soit $x \in A$, ce qui implique que $x \in B$ car $A \subset B$, - soit $x \in B$.

Dans les deux cas, $x \in B$. On a donc bien montré que $A \cup B = B$.

$\diamond$ $A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$: Supposons que $A \cup B = B$, et montrons que $A \cap B = A$ par double inclusion. On sait déjà que $A \cap B \subset A$, il reste donc à montrer que $A \subset A \cap B$. Soit $x \in A$. On a alors $x \in A \cup B = B$, donc $x \in B$. Finalement, $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$.

$\diamond$ $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$: Supposons que $A \cap B = A$, et montrons que $A \subset B$. Soit $x \in A$. On a alors $x \in A \cap B = A$, donc en particulier $x \in B$. Finalement, $x \in B$. On a donc montré que $A \subset B$.

Ainsi, on a montré

$$A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A,$$

ce qui permet de montrer les deux équivalences.

Remarque:

On peut généraliser l'intersection et l'union à un nombre quelconque de sous-ensembles. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, on définit

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x,\ \exists i \in I,\ x \in A_i\}, \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x,\ \forall i \in I,\ x \in A_i\}.$$

Exemples.

1. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$.
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[= \mathbb{R}_+$.
3. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$.

Définition: Ensembles disjoints, partition

- On dit que deux ensembles A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément en commun. Dans ce cas, on note parfois $A \bigsqcup B$ au lieu de $A \cup B$.
- Soit E un ensemble. On dit qu'un ensemble $\{A_i,\ i \in I\}$ de parties non vides de E est une *partition* de E si :
  1. les ensembles A_i sont deux à deux disjoints : si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \varnothing$,
  2. $\bigsqcup_{i \in I} A_i = E$.

Exemples.

1. Si $A = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$, alors A et B forment une partition de $\mathbb{N}$. En effet, $A \cap B = \varnothing$, et $A \cup B = \mathbb{N}$.
2. Si $C_n = [n, n+1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les ensembles C_n forment une partition de $\mathbb{R}_+$.

Différence, complémentaire

Définition: Différence, complémentaire

— Soient A et B deux ensembles. On définit la *différence de B dans A* comme l'ensemble

$$B \setminus A = \{x \in B,\ x \notin A\}.$$

— Si E est un ensemble et $A \subset E$, on appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble $E \setminus A$. On le note $\overline{A}$ ou A^c lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. On a donc :

$$\forall x \in E,\ x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow\ x \notin A.$$

Remarque:

— Si $A \subset E$, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de E.
— Si A et B sont deux ensembles, alors $B \setminus A = B \cap \overline{A}$.
— Si A et B sont deux ensembles, alors $A \subset B \ \Leftrightarrow\ \overline{B} \subset \overline{A}$. En effet, la contraposée de « $x \in A \Rightarrow x \in B$ » s'écrit « $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ ».
— Si $A \subset E$, alors $\overline{\overline{A}} = A$, et $\overline{E} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = E$.

Exemples.
— Le complémentaire de l'ensemble des entiers pairs dans $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers impairs de $\mathbb{Z}$.
— Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'intervalle $]-1, 3]$ est l'ensemble $]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[$.

Proposition: Lois de Morgan

Si E est un ensemble et A et B sont deux parties de E, alors

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exercice 4. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$,

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Cet ensemble est appelé *différence symétrique* de A et B et se note $A \Delta B$.

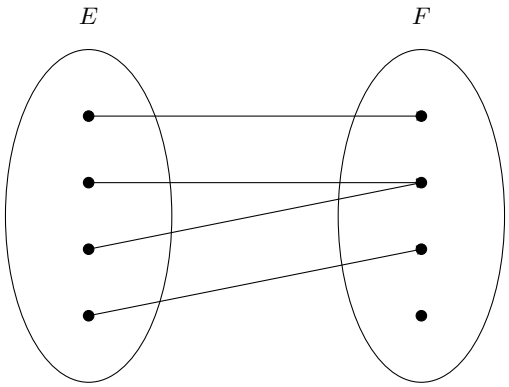
2 Définition d'une application (plus théorique)

Définition: Application

Soient E et F deux ensembles. Une **application** de E (*l'ensemble de départ*) dans F (*l'ensemble d'arrivée*) est une relation entre les éléments de ces ensembles qui associe à chaque élément x de E un unique élément y de F. Si f est une application de E dans F, on note $f : E \to F$ et pour plus de précision :

$$f : E \to F \qquad x \mapsto f(x)$$

Ceci se lit « f de E dans F qui à x associe $f(x)$ ». On appelle **image** de x l'élément $y = f(x)$ et on dit que x est un **antécédent** de y. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{A}(E, F)$.

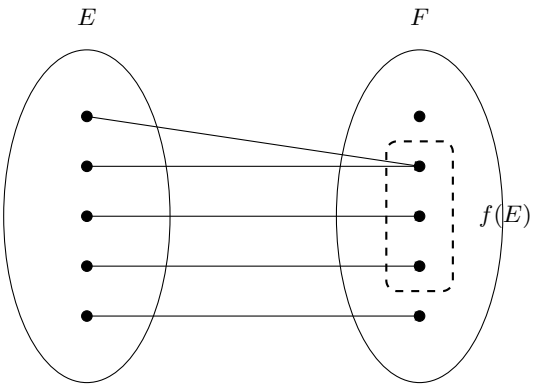


Une application est caractérisée par le fait que chaque élément de l'ensemble de départ admet une unique image. Par contre, un élément de l'ensemble d'arrivée peut admettre plusieurs antécédents ou aucun.

Définition: Ensemble image

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On appelle **ensemble image** (ou simplement **image**) de f, le sous-ensemble de F défini par :

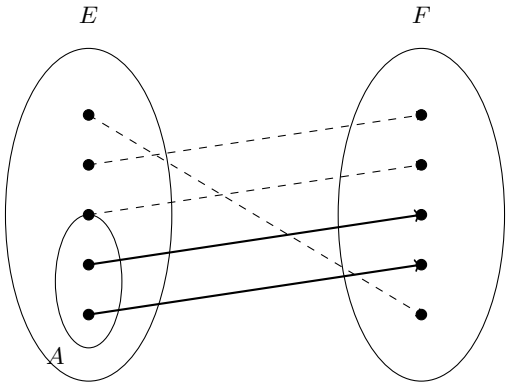
$$f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\}.$$



Définition: Restriction d'une application

Soient E et F deux ensembles, A une partie de E, et $f : E \to F$. On appelle **restriction** de f à A l'application définie par :

$$f_{|A} : A \to F \qquad x \mapsto f(x)$$

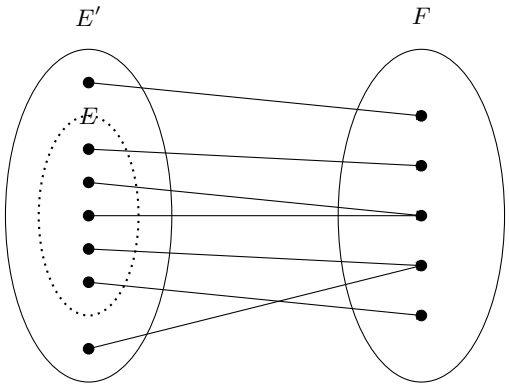


Définition: Prolongement d'une application

Soient E et F deux ensembles, $E \subset E'$ et $f : E \to F$. Un **prolongement** de f à E' est une application $\tilde{f} : E' \to F$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \tilde{f}(x) = f(x),$$

c'est-à-dire une application telle que $\tilde{f}_{|E} = f$.



On parlera d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité de la même manière que pour les applications réelles.

3 Un peu de dénombrement

Définition: Ensemble fini

Un ensemble E est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, le nombre n d'éléments de E est appelé *cardinal* de E, et est noté $\operatorname{Card} E$, ou $\#E$.

Exemple.
— $\operatorname{Card}(\varnothing) = 0$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) = n$.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à des questions de dénombrements : il s'agit de « compter » les éléments d'un ensemble fini, c'est-à-dire de préciser son cardinal.

Commençons par deux observations utiles à cette fin, connues sous le nom de « principe additif » et « principe multiplicatif ».

Proposition: Principes additifs et multiplicatifs

— Si E et F sont des ensembles disjoints, i.e. que $E \cap F = \varnothing$, alors $\operatorname{Card}(E \cup F) = \operatorname{Card} E + \operatorname{Card} F$.
— Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ sont deux à deux disjoints, alors $\#(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} \# E_i$.
— Si E et F sont deux ensembles, alors $\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F$.
— Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles, alors $\#(E_1 \times \cdots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \# E_i$.

Exemple. Le nombre de n-uplets d'éléments de $\{0, 1\}$, c'est-à-dire le cardinal de $\{0, 1\}^n$, est $\operatorname{Card}(\{0, 1\}^n) = 2^n$.

Enfin, une formule qui n'est pas fondamentale à connaître :

Proposition: Formule du crible

Soient A, B deux sous ensembles finis d'un ensemble E. On a $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Démonstration. On remarque que

$$A \cup B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B).$$

Comme c'est une union disjointe, c'est une partition de $A \cup B$. Ainsi, :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(\overline{A} \cap B) + \text{card}(A \cap \overline{B}) + \text{card}(A \cap B). \tag{1}$$

De plus, $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.

C'est une partition de A, donc d'après la proposition 3.7 : $\text{card}(A) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \cap \overline{B})$, et, de manière analogue, $\text{card}(B) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(\overline{A} \cap B)$.

Ainsi, en reprenant l'équation (1) :

$$\begin{aligned}\text{card}(A \cup B) &= (\text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)) + (\text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)) + \text{card}(A \cap B) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B),\end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité.

3.1 Combinaisons, coefficients binomiaux

On cherche à compter les *sous-ensembles* de cardinal k d'un ensemble E. On rappelle que dans la définition d'un ensemble, l'ordre des éléments n'a pas d'importance : $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Exemples.

— Lorsqu'on compte les différentes mains de 5 cartes avec un jeu de 52 cartes, *l'ordre ne compte pas* : une même main écrite dans un autre ordre est la même main.

— Lorsqu'on compte les anagrammes du mot BON, *l'ordre compte* : le mot NOB n'est pas le même que BON.

Définition: Coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $k \in \mathbb{N}$, on note $\binom{n}{k}$ le *nombre de sous-ensembles à k éléments* d'un ensemble à n éléments.

On l'appelle *coefficient binomial* ou *combinaison*, et on le lit « k parmi n ».

Remarque:

— Si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

— Choisir k éléments parmi n revient à *ne pas* choisir $n - k$ éléments :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (0 \leq k \leq n).$$

— Interprétation : $\binom{n}{k}$ compte les tirages *simultanés* (l'ordre ne compte pas) de k éléments parmi n.

— On a déjà vu différentes manières de faire des calculs avec les coefficients binomiaux.

Exemples.

— Le nombre de mains de 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes est $\binom{52}{5}$.

— Le nombre de grilles du loto de 6 numéros choisis dans $[\![1, 49]\!]$ est $\binom{49}{6}$.

Proposition: Formule de Pascal

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^2$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Démonstration (combinatoire). Considérons un ensemble $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ à n éléments. On veut compter ses parties à k éléments. Scindons ces parties en deux familles :

— celles qui *contiennent* l'élément x_n : en retirant x_n, on obtient des parties à $k-1$ éléments de $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$; il y en a donc $\binom{n-1}{k-1}$;

— celles qui *ne contiennent pas* x_n : ce sont exactement les parties à k éléments de $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$; il y en a $\binom{n-1}{k}$.

Ces deux familles sont disjointes et forment une partition de l'ensemble des parties à k éléments de E. Par le principe additif, on obtient bien $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. □

Remarque: Triangle de Pascal

La formule de Pascal donne une manière rapide de retrouver tous les coefficients sans les recalculer : chaque nombre est la somme des deux nombres « au-dessus ». Ci-dessous, les valeurs pour $0 \leq n \leq 6$.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \implies \binom{n}{k}.$$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

Là, raconter comment on le construit (on met les "1", puis on fait des additions).

Proposition: Nombre de parties d'un ensemble fini

Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors $\mathrm{card}\mathcal{P}(E) = 2^n$.

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E ayant k éléments. Comme $\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$ (union disjointe), on a

$$\mathrm{card}\mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}\mathcal{P}_k(E) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Or $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. On en déduit que $\mathrm{card}\mathcal{P}(E) = 2^n$. □

4 Nombre de permutations

Définition: Permutation

Soit E un ensemble fini. On appelle *permutation de* E une bijection de E dans lui-même.

En d'autres termes, une *permutation* d'un ensemble E est une manière de réordonner tous les éléments de E.

Exemple. On cherche à calculer le nombre d'anagrammes du mot BON, c'est-à-dire des mots, même sans signification, formés en réordonnant les lettres B, O et N. Cela revient à calculer le nombre de permutations de l'ensemble $\{B, O, N\}$. On obtient

$$3 \times 2 \times 1 \;=\; 3! \quad \text{anagrammes possibles.}$$

Proposition: Nombre de permutations

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Il y a exactement $n!$ permutations de E.

Démonstration. Écrivons $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Il s'agit de compter les bijections $f : E \to E$. On choisit d'abord $f(x_1)$: il y a n choix possibles. Pour chacun de ces choix, il reste $n-1$ choix possibles pour $f(x_2)$, puis $n-2$ pour $f(x_3)$, etc. Au total,

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \;=\; n!. \quad \square$$

5 Nombre de k-uplets

5.1 k-uplets

Rappel. Un *k-uplet* d'un ensemble E est un élément de E^k. Il s'agit d'une collection *ordonnée* $(x_1, \dots, x_k)$ d'éléments de E. L'ordre compte : $(x_1, \dots, x_k) \neq (x_2, x_1, x_3, \dots, x_k)$ en général. Un même élément peut apparaître plusieurs fois dans le k-uplet.

On s'intéresse au nombre de k-uplets d'un ensemble E. Il s'agit du nombre de manières de tirer *successivement et avec remise* k éléments parmi $n = \mathrm{card}E$, en tenant compte de l'ordre.

Proposition: Nombre de k-uplets

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $k \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de k-uplets d'éléments de E est n^k. En d'autres termes,

$$\mathrm{card}(E^k) = n^k.$$

Démonstration. On construit la suite $(x_1, \dots, x_k)$ pas à pas. Pour chaque position, on a n choix possibles (remise autorisée), indépendants des choix précédents. Par le principe multiplicatif,

$$\mathrm{card}(E^k) = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ fois}} = n^k. \quad \square$$

Exemple. On lance un premier dé à 6 faces, puis un deuxième, et on note les résultats obtenus. Le nombre de possibilités est $\mathrm{card}(\llbracket 1, 6 \rrbracket^2) = 6^2$.

5.2 k-uplets d'éléments distincts

On s'intéresse maintenant au nombre de k-uplets *d'éléments distincts* d'un ensemble E (on parle aussi d'*arrangements de* E), c'est-à-dire de k-uplets $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ tels que, pour tous $i \neq j$ dans $\{1, \dots, k\}$, on ait $x_i \neq x_j$.

Il s'agit du nombre de manières de tirer *successivement et sans remise* k éléments parmi n, en tenant compte de l'ordre.

Proposition: Nombre d'arrangements

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le nombre de k-uplets *d'éléments distincts* de E est donné par

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \;=\; \frac{n!}{(n-k)!}.$$

La situation est analogue à celle des permutations, sauf qu'on s'arrête après avoir choisi k éléments. On choisit d'abord le premier élément du k-uplet parmi les n éléments de E. Pour chacun de ces choix, il y a $n-1$ choix possibles pour le deuxième élément, puis $n-2$ pour le troisième, etc. Lorsqu'on arrive au $k^{\text{ème}}$ élément, il y a donc $n-k+1$ choix possibles.

Démonstration. Par le principe multiplicatif, le nombre total de k-uplets possibles est

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}. \square$$

Exemple. On cherche le nombre de mots de 3 lettres *distinctes* formés en choisissant 3 lettres du mot BONUS. Le mot BONUS contient 5 lettres toutes distinctes ; il y a donc

$$5 \times 4 \times 3 \;=\; 60$$

possibilités (5 choix pour la première lettre, puis 4 pour la deuxième, puis 3 pour la troisième).