I. Ensembles

1 Écriture en extension

Donner l'écriture en extension des ensembles suivants.

1. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 8 \text{ et } n \geq 2\}$
2. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 8 \text{ ou } n \geq 2\}$
3. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 2 \text{ et } n \geq 8\}$
4. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 2 \text{ ou } n \geq 8\}$
5. $\{n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{3} \in \mathbb{N}\}$
6. $\{n \in \mathbb{N},\ \frac{n-2}{3} \in \mathbb{N}\}$
7. $\{n^4,\ n \in \mathbb{N}^*\}$
8. $\{x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x = (-3)^n\}$
9. $\{2^{-n},\ n \in \mathbb{N}\}$
10. $\{(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$

2 Écriture en compréhension

Donner une écriture en compréhension ou en paramétrisation des ensembles suivants.

1. $\{\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$
2. $\{-8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13\}$
3. $\{\ldots, -17, -15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1\}$
4. $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots\}$
5. $\{\frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots\}$
6. $\{1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, \ldots\}$
7. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots\}$

3 Parties d'un ensemble

1. Soit $E = \{0\}$. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ en extension.
2. Même question si $E = \{1, 2\}$.

4 Couples particuliers

On donne les ensembles $A = \mathbb{R}^2$, $B = (\mathbb{R}^*)^2$, $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Identifier auxquels de ces ensembles appartiennent les couples suivants : $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

5 Représentation graphique

Donner une représentation graphique des sous-parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \geq 1\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy < 0\}$
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leq \min(x, 2-x) \text{ et } y \geq -1\}$
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2+x^2 \leq 1 \text{ ou } y^2+(x-1)^2 \leq 1\}$

6 Inclusion d'ensembles

On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 2\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\}.$$

Montrer que $A \subset B$. A-t-on $A = B$?

7 Multiples et inclusions

1. Soient A l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et B l'ensemble des entiers naturels multiples de 3. Montrer que $A \subset B$.
2. Soient $E = \{x \in \mathbb{R},\ |x - 2| \leq 3\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 5\}$. Montrer que $E \subset F$.
3. Soient $E = \{x \in \mathbb{R},\ x < 1\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R},\ |x - 3| > 2\}$. Montrer que $E \subset F$.

8 Équivalence d'inclusions

Soient A, B deux ensembles. Montrer que $\quad A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A.$

9 Trois sous-ensembles

Soient A, B, C trois sous-parties d'un ensemble E.

1. Montrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$.
2. (a) Montrer que $(A \cup B) \setminus A = B \cap \bar{A}$.
   (b) On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

10 Identité ensembliste

Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Montrer que

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cup B.$$

11 A MAITRISER : Égalité d'ensemble 1

On note $\varphi : M \to M +^t M$.

1. Démontrer que $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \varphi(M) = 2M\}$.
2. Démontrer que $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \varphi(M) = 0\}$.

12 Égalité d'ensemble 2

On note $\varphi : M \to M +^t M$.

1. Démontrer que $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \varphi(M) = 2M\}$.
2. Démontrer que $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \varphi(M) = 0\}$.

13 A MAITRISER : Égalité d'ensemble 3

1. Démontrer que $\{\lambda X : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{P(X) = aX^2 + bX + c : P(0) = 0 \text{ et } P(1) = b\}$.
2. Démontrer que $\{\lambda X^2 : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{P(X) = aX^2 + bX + c : P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 0\}$.

14 A MAITRISER : Égalité d'ensemble 4

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t + 1, 4t + 3) \,;\, t \in \mathbb{R}\}$.
Démontrer que $A = C$.

15 A MAITRISER (mais plus dur) : Inclusion d'ensemble 5

Soit E, F, G trois ensembles. On suppose qu'il existe un élément de G noté 0_G. *Par exemple, ça peut être le 0 réel ; le 0 des matrices (i.e. la matrice nulle) ; la 0 des fonctions (i.e. la fonction nulle), etc....*
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
On définit

$$\text{Ker}(g) = \{y \in F : g(y) = 0\}. \text{ et } \text{Im}(f) = \{f(x) : x \in E\}.$$

On suppose que : $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = 0_G$. Démontrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

16 Fonctions indicatrices

Soient E un ensemble et A une partie de E. On définit l'*indicatrice* de A comme l'application $\mathbf{1}_A$ de E dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in E, \quad \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E. Dans chacun des cas suivants, écrire f sous la forme $\mathbf{1}_C$, où C est une partie de E qu'on précisera.

1. $f = \mathbf{1} - \mathbf{1}_A$
2. $f = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$
3. $f = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$
4. $f = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$
5. $f = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$

II - retour sur les applications

17 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? (si oui, déterminer leur application réciproque) :

1. $f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$
2. $f_2 : [-1,1] \to [0,1],\ x \mapsto |x|$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to]1,+\infty[,\ x \mapsto e^{-x}+1$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to [-\sqrt{2},\sqrt{2}],\ x \mapsto \cos(x)+\sin(x)$

18 Une bijection explicite

Soit $f : [1,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[, \quad x \mapsto e^{(\ln(x))^2}$.
Démontrer que f est une bijection et déterminer une expression de sa bijection réciproque.

19 Application $x \mapsto e^{|x|}+1$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{|x|}+1$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J. On explicite les applications réciproques de ces deux bijections.

20 Application sur $\mathbb{Z}$

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+(-1)^n$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Calculer $f \circ f$. En déduire l'expression de la réciproque f^{-1} de f.
3. Résoudre l'équation $347 = n+(-1)^n$ où $n \in \mathbb{Z}$.

21 Application $(x,y) \mapsto (x+y,xy)$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y,xy)$.

1. L'application f est-elle injective ?
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $(a,b) \in f(\mathbb{R}^2) \iff a^2-4b \geq 0$.
3. L'application f est-elle surjective ?

22 Composition de fonctions

Soient E,F,G trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$. On pose $h = g \circ f$. Montrer que :

1. si h est injective, alors f est injective,
2. si h est surjective, alors g est surjective,
3. si h est surjective et g injective, alors f est surjective,
4. si h est injective et f surjective, alors g est injective.

23 Fonction sur $\mathcal{P}(E)$

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \quad X \mapsto (X \cap A,\ X \cap B).$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

24 Cardinal et bijection

Soit f une application de E dans F avec E et F de cardinal fini.

1. Si f est surjective, que peut-on en déduire sur $\mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(F)$?
2. Si f est injective, que peut-on en déduire sur $\mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(F)$?
3. Si f est bijective, que peut-on en déduire sur $\mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(F)$?

III Dénombrement

25 Dénombrement de matrice

1. Combien y a-t-il de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ composées de 2 "1" et de 7 "0" ?
2. Combien y a-t-il de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont chaque coefficient est à valeur dans $\{0, 1, 2\}$?
3. Combien y a-t-il de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec un "1" sur chaque ligne, et des 0 ailleurs ?
4. Combien y a-t-il de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec un "1" sur chaque ligne, et des 0 ailleurs ?

26 Oral de Centrale 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\tau_n = \left\{A \in S_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \in \{0,1\} \text{ et } c_{11} + c_{22} + ... + c_{nn} = 0\right\}$.

1. Soit $M \in \tau_n$. Démontrer que la diagonale de M est composée uniquement de 0
2. Dénombrer le nombre de matrices de τ_2
3. Dénombrer le nombre de matrices de τ_3
4. Dénombrer le nombre de matrices de τ_4
5. *Un peu plus difficile.* Dénombrer le nombre de matrices de τ_n

27 Dénombrement de matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \leq n^2$. On note $\tau_n^k = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \in \{0,1\} \text{ et Il y a } k \text{ "1" dans la matrice } A\right\}$.

1. Dénombrer le nombre d'éléments de τ_2^3
2. Dénombrer le nombre d'éléments de τ_2^1
3. Dénombrer le nombre d'éléments de τ_n^k

28 Dénombrement (cartes)

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

1. Aucune condition.
2. Il y a au moins un pique parmi les cinq cartes.
3. Il y a exactement deux valets.
4. Il y a un as et deux carreaux.
5. Il n'y a pas de carte en dessous de 9.
6. Les cinq cartes forment deux paires (mais pas de brelan).
7. Les cinq cartes sont de la même couleur.
8. Les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur).

29 Dénombrement (tarot)

On tire 5 atouts dans un jeu de tarot. (22 cartes. Pour l'exercice, cela revient à prendre des cartes entre 1 et 22,) Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

1. Au moins un atout est multiple de 5.
2. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3.
3. On a tiré le 1 ou le 21.

30 Encore ! (clavier de digicode)

À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de douze touches :

- trois lettres (A, B et C),
- neuf chiffres non nuls $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.

Le code déclenchant l'ouverture de la porte peut être changé par le régisseur. Ce code est formé d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres.

1. Dans cette question, on considère que les trois chiffres du code ne sont pas forcément distincts. Combien de codes commençant par une lettre le régisseur peut-il proposer ?
2. Dans cette question, on considère que le code ne contient que des chiffres distincts. Combien de codes le régisseur peut-il proposer ?

31 Anagrammes

Combien y a-t-il d'anagrammes de MAISON ? de RADAR ? de MISSISSIPPI ? d'ABRACADABRA ?

32 Recrutement de Trader quantitatif

Vous êtes le gestionnaire de portefeuille d'un fonds d'une valeur de 75 millions de dollars. Votre fonds peut être investi dans 5 classes d'actifs possibles :

1. Cryptomonnaies[1]
2. Contrats événementiels[2]
3. Produit à revenu fixe[3]
4. Contrat à terme sur matières premières[4]
5. Option sur actions[5]

De combien de façons différentes pouvez-vous investir l'ensemble des 75 millions de dollars dans ces cinq classes d'actifs, en utilisant uniquement des paliers de 1 million de dollars ?

Par exemple, une stratégie d'investissement possible serait :

1. Options sur actions : 7 millions de dollars
2. Contrats à terme sur matières premières : 35 millions de dollars
3. Produits de revenu fixe : 20 millions de dollars
4. Contrats événementiels : 12 millions de dollars
5. Cryptomonnaies : 1 million de dollars

Seconde question Et maintenant, combien y a-t-il de manières si l'on impose d'avoir au moins 5 millions de dollars dans chaque classe d'actifs ?

33 Recrutement de Trader quantitatif

Combien y-a-t-il d'entiers plus petit que 1 million tel que la somme de ses chiffres fasse 19 ?[6]

34 Recrutement de Trader quantitatif

Vous lancez 3 dés 6 équilibrés, un bleu, un rouge et un noir. Quel est le nombre de configurations où les chiffres apparaissent dans un ordre strictement croissant ? Et quel est le nombre total de configurations ?

35 Recrutement de Trader quantitatif

Vous allez voir un marchand de glace, qui a 10 parfums de glace. On peut prendre jusqu'à 3 boules. Combien de glaces différentes pouvez-vous créer ? On suppose qu'il faut prendre au moins un parfum.

36 Recrutement de Trader quantitatif

On plonge un cube fait de 10 petits cubes blancs de longueur dans de la peinture, puis on le ressort. Combien de cubes sont encore blancs ?

[1] Monnaies numériques décentralisées reposant sur la technologie de la blockchain. Exemples : Bitcoin, Ethereum.

[2] Instruments financiers dont la valeur dépend de la réalisation (ou non) d'un événement spécifique. Exemple : contrat lié au résultat d'une élection ou à la météo.

[3] Actifs financiers qui rapportent un revenu régulier et prédéterminé. Exemples : obligations d'État, obligations d'entreprises.

[4] Contrat standardisé engageant à acheter ou vendre une matière première à une date future et à un prix fixé d'avance. Exemples : pétrole, or, blé.

[5] Droit (et non obligation) d'acheter ou de vendre une action à un prix déterminé avant une certaine échéance.

[6] Eh oui ! Sur `https://openquant.co`, on peut voir des questions de recrutement pour faire du Trading quantitatif. C'est un problème niveau 7/10.