I. Ensembles

1 Écriture en extension

Donner l'écriture en extension des ensembles suivants.

1. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 8 \text{ et } n \geq 2\}$
2. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 8 \text{ ou } n \geq 2\}$
3. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 2 \text{ et } n \geq 8\}$
4. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 2 \text{ ou } n \geq 8\}$
5. $\{n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{3} \in \mathbb{N}\}$
6. $\{n \in \mathbb{N},\ \frac{n-2}{3} \in \mathbb{N}\}$
7. $\{n^4,\ n \in \mathbb{N}^*\}$
8. $\{x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x = (-3)^n\}$
9. $\{2^{-n},\ n \in \mathbb{N}\}$
10. $\{(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$

Corrigé

1. Les entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et strictement inférieurs à 8 sont $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
2. Tout entier naturel vérifie $n < 8$ ou $n \geqslant 2$. Ainsi, l'ensemble s'écrit $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\} = \mathbb{N}$.
3. Aucun entier naturel n'est à la fois strictement inférieur à 2 et supérieur ou égal à 8. Ainsi, l'ensemble est $\varnothing$.
4. Les entiers naturels strictement inférieurs à 2 ou supérieurs ou égaux à 8 sont $\{0, 1, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$.
5. La condition $\dfrac{n}{3} \in \mathbb{N}$ signifie que n est un multiple de 3. Ainsi, l'ensemble s'écrit $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.
6. La condition $\dfrac{n-2}{3} \in \mathbb{N}$ signifie que n est de la forme $3k + 2$, avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, l'ensemble s'écrit $\{2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$.
7. L'ensemble des puissances quatrièmes des entiers naturels non nuls s'écrit $\{1, 16, 81, 256, 625, 1296, \ldots\}$.
8. Les premières puissances de -3 sont $1, -3, 9, -27, 81, \ldots$ Ainsi, l'ensemble s'écrit $\{1, -3, 9, -27, 81, \ldots\}$.
9. Les premières puissances négatives de 2 sont $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \ldots\right\}$.
10. Selon la parité de n, $(-1)^n$ vaut 1 ou -1. Ainsi, l'ensemble s'écrit $\{-1, 1\}$.

2 Écriture en compréhension

Donner une écriture en compréhension ou en paramétrisation des ensembles suivants.

1. $\{\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$
2. $\{-8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13\}$
3. $\{\ldots, -17, -15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1\}$
4. $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots\}$
5. $\{\frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots\}$
6. $\{1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, \ldots\}$
7. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots\}$

Corrigé

1. L'ensemble des multiples de 3 s'écrit $\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Il s'agit des termes de la forme $-8+3k$, pour k compris entre 0 et 7 : $\{-8+3k \mid k \in [\![0,7]\!]\}$.
3. L'ensemble des entiers négatifs impairs s'écrit $\{-(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$.
4. L'ensemble des puissances de 2 s'écrit $\left\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$.
5. L'ensemble des puissances de 2 d'exposant supérieur ou égal à -7 s'écrit $\left\{2^k \mid k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \geqslant -7\right\}$.
6. L'ensemble des cubes des entiers naturels non nuls s'écrit $\left\{k^3 \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$.
7. L'ensemble des inverses des entiers naturels non nuls s'écrit $\left\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

3 Parties d'un ensemble

1. Soit $E = \{0\}$. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ en extension.
2. Même question si $E = \{1, 2\}$.

Corrigé

1. Les parties de $E = \{0\}$ sont l'ensemble vide et E lui-même. Ainsi, $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}\}$.
2. Les parties de $E = \{1, 2\}$ sont l'ensemble vide, les singletons $\{1\}$ et $\{2\}$, et $\{1, 2\}$. Ainsi, $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

4 Couples particuliers

On donne les ensembles $A = \mathbb{R}^2$, $B = (\mathbb{R}^*)^2$, $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Identifier auxquels de ces ensembles appartiennent les couples suivants : $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.

Corrigé

1. Le couple $(0, 0)$ appartient à $\mathbb{R}^2$, mais ses deux coordonnées sont nulles. Ainsi, $(0, 0) \in A, (0, 0) \notin B, (0, 0) \notin C, (0, 0) \notin D$.
2. Le couple $(1, 0)$ appartient à $\mathbb{R}^2$ et est différent de $(0, 0)$, mais sa seconde coordonnée est nulle. Ainsi, $(1, 0) \in A, (1, 0) \notin B, (1, 0) \in C, (1, 0) \notin D$.
3. Le couple $(0, 1)$ appartient à $\mathbb{R}^2$, est différent de $(0, 0)$ et sa seconde coordonnée est non nulle. Cependant, sa première coordonnée est nulle. Ainsi, $(0, 1) \in A, (0, 1) \notin B, (0, 1) \in C, (0, 1) \in D$.
4. Les deux coordonnées du couple $(1, 1)$ sont non nulles. Ainsi, $(1, 1) \in A, (1, 1) \in B, (1, 1) \in C, (1, 1) \in D$.

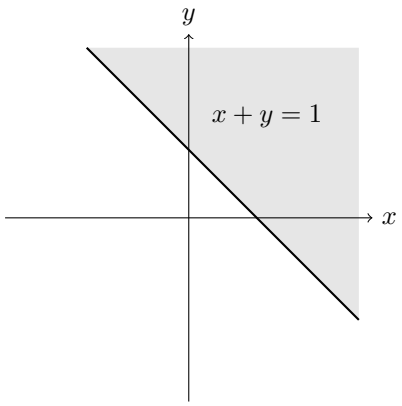
5 Représentation graphique

Donner une représentation graphique des sous-parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

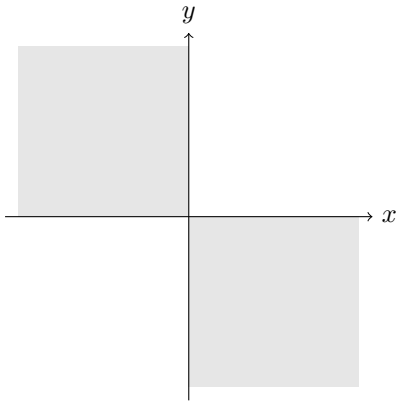
1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \geq 1\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy < 0\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leq \min(x, 2-x) \text{ et } y \geq -1\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2+x^2 \leq 1 \text{ ou } y^2+(x-1)^2 \leq 1\}$

Corrigé

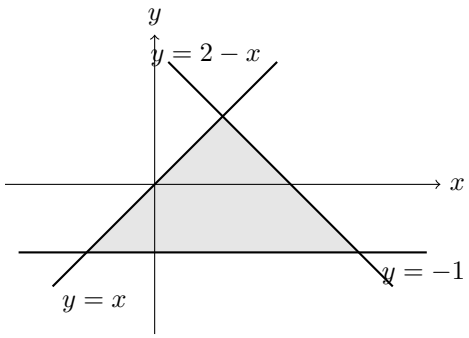
1. La frontière est la droite d'équation $x + y = 1$, soit $y = 1 - x$. On représente donc le demi-plan situé au-dessus de cette droite.



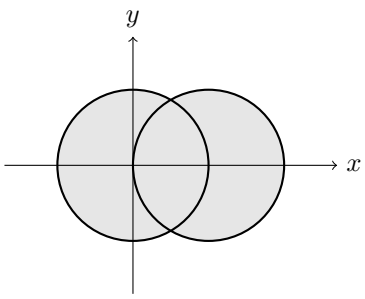
2. La condition $xy < 0$ signifie que x et y sont de signes contraires. Cela donne



3. La condition $y \leq \min(x, 2 - x)$ signifie $y \leq x$ et $y \leq 2 - x$. Il faut donc tracer les droites $y = x$ et $y = 2 - x$, et prendre les points en dessous. Avec $y \geq -1$, on obtient le triangle



4. L'ensemble D est la réunion de deux disques fermés de rayon 1, l'un centré en $(0, 0)$ et l'autre centré en $(1, 0)$.



6 Inclusion d'ensembles

On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 2\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\}.$$

Montrer que $A \subset B$. A-t-on $A = B$?

Corrigé

Soit $(x, y) \in A$. On a donc $x = 2 + y$. Donc, $(3x + y + 2)(x + 2y + 4) = (4y + 8)(3y + 6) = 12(y + 2)^2 \geq 0$. Donc, $(x, y) \in B$. D'où $A \subset B$.

En revanche, $(10, 10) \in B$ car $42 \times 34 \geq 0$, mais $10 - 10 \neq 2$, donc $(10, 10) \notin A$. Donc, $B \not\subset A$.

7 Multiples et inclusions

1. Soient A l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et B l'ensemble des entiers naturels multiples de 3. Montrer que $A \subset B$.
2. Soient $E = \{x \in \mathbb{R},\ |x - 2| \leq 3\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 5\}$. Montrer que $E \subset F$.
3. Soient $E = \{x \in \mathbb{R},\ x < 1\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R},\ |x - 3| > 2\}$. Montrer que $E \subset F$.

Corrigé

1. Soit $n \in A$. Comme n est un multiple de 6, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$. Ainsi, $n = 3(2k)$. Or $2k \in \mathbb{N}$, donc n est un multiple de 3. Donc, $n \in B$. D'où $A \subset B$.
2. Soit $x \in E$. On a donc $|x - 2| \leq 3$. Ainsi, $-3 \leq x - 2 \leq 3$, donc $-1 \leq x \leq 5$. En particulier, $x \leq 5$, donc $x \in F$. D'où $E \subset F$.
3. Soit $x \in E$. On a donc $x < 1$. Ainsi, $3 - x > 2$, donc $|x - 3| = 3 - x > 2$. Donc $x \in F$. D'où $E \subset F$.

8 Équivalence d'inclusions

Soient A, B deux ensembles. Montrer que $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.

Corrigé

Procédons par chaîne d'implication.

- Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in A \cup B$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$. Dans les deux cas, $x \in B$. Donc $A \cup B \subset B$. Évidemment, $B \subset A \cup B$, donc $A \cup B = B$.

- Supposons que $A \cup B = B$. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B = B$, donc $x \in B$. Ainsi, $x \in A \cap B$, donc $A \subset A \cap B$. Or $A \cap B \subset A$, donc $A \cap B = A$.
- Supposons que $A \cap B = A$. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cap B$, donc $x \in B$. D'où $A \subset B$.

9 Trois sous-ensembles

Soient A, B, C trois sous-parties d'un ensemble E.

1. Montrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$.
2. (a) Montrer que $(A \cup B) \setminus A = B \cap \bar{A}$.
   (b) On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Corrigé

1. On montre que $A \subset B$. L'autre inclusion se montre symétriquement.
   Soit $x \in A$. Donc $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = A \cap B$, donc $x \in A \cap B$. Ainsi, $x \in B$. D'où $A \subset B$.
   De même, $B \subset A$. Donc $A = B$.
2. (a) Soit $x \in E$. On a
   $$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus A &\iff x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \\ &\iff (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \notin A \\ &\iff x \in B \text{ et } x \notin A \\ &\iff x \in B \cap \bar{A}. \end{aligned}$$
   Donc $(A \cup B) \setminus A = B \cap \bar{A}$.
   (b) D'après la question précédente et $A \cup B = A \cup C$, on a $B \cap \bar{A} = (A \cup B) \setminus A = (A \cup C) \setminus A = C \cap \bar{A}$.
   De plus, par hypothèse, $A \cap B = A \cap C$. Ainsi, $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = (C \cap A) \cup (C \cap \bar{A}) = C$.

10 Identité ensembliste

Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Montrer que $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Corrigé

On procède par double inclusion.
On a bien sûr $A \cap B \subset A$ et $A \cap \overline{B} \subset A$. Donc, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \subset A$.
Soit $x \in A$. Alors :

- Soit $x \in B$, auquel cas $x \in A \cap B$
- Soit $x \notin B$, auquel cas $x \in \overline{B}$, donc $x \in A \cap \overline{B}$.

Dans tous les cas, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. D'où l'inclusion recherchée.

11 A MAITRISER : Égalité d'ensemble 1

On note $\varphi : M \to M + {}^t M$.

1. Démontrer que $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \varphi(M) = 2M\}$.
2. Démontrer que $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \varphi(M) = 0\}$.

Corrigé

1. Procédons par double inclusion

   $\boxed{\subset}$ Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tM = M$, donc $\varphi(M) = M + {}^tM = 2M$. Ainsi, $M \in \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \varphi(M) = 2M\}$.

   $\boxed{\supset}$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(M) = 2M$. Alors $M + {}^tM = 2M$, donc ${}^tM = M$. Ainsi, $M \in S_n(\mathbb{R})$.

   D'où l'égalité des deux ensembles.

2. $\boxed{\subset}$ Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tM = -M$, donc

$$\varphi(M) = M + {}^tM = M - M = 0.$$

   Ainsi, $M \in \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \varphi(M) = 0\}$.

   $\boxed{\supset}$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(M) = 0$. Alors $M + {}^tM = 0$, donc ${}^tM = -M$. Ainsi, $M \in A_n(\mathbb{R})$.

   D'où l'égalité des deux ensembles.

12 A MAITRISER Égalité d'ensemble 3

1. Démontrer que $\{\lambda X : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{P(X) = aX^2 + bX + c : P(0) = 0 \text{ et } P(1) = b\}$.
2. Démontrer que $\{\lambda X^2 : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{P(X) = aX^2 + bX + c : P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 0\}$.

Corrigé

1. On procède par double inclusion.

   $\boxed{\subset}$ Soit $P(X) = \lambda X$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $P(0) = 0$ et $P(1) = \lambda$, qui est bien le coefficient de X dans P. Donc P appartient à l'ensemble de droite.

   $\boxed{\supset}$ Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ tel que $P(0) = 0$ et $P(1) = b$.

   Comme $P(0) = 0$, on a $c = 0$. De plus, $P(1) = b$ donne $a + b + 0 = b$, donc $a = 0$. Ainsi, $P(X) = bX$, donc P appartient à l'ensemble de gauche.

2. $\boxed{\subset}$ Soit $P(X) = \lambda X^2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$. Donc P appartient à l'ensemble de droite.

   $\boxed{\supset}$ Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$.

   Comme $P(0) = 0$, on a $c = 0$. De plus, $P'(X) = 2aX + b$, donc $P'(0) = b = 0$. Ainsi, $P(X) = aX^2$, donc P appartient à l'ensemble de gauche.

13 A MAITRISER : Égalité d'ensemble 4

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t + 1, 4t + 3) \,;\, t \in \mathbb{R}\}$.
Démontrer que $A = C$.

Corrigé

On procède par double inclusion.
Montrons que $A \subset C$.
Soit $(x, y) \in A$. On a donc $4x - y = 1$, soit $y = 4x - 1$.
Posons $t = x - 1$. On a alors $x = t + 1$ et

$$y = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3.$$

Ainsi, $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$, avec $t \in \mathbb{R}$. Donc $(x, y) \in C$. D'où $A \subset C$.

Montrons maintenant que $C \subset A$.
Soit $(x, y) \in C$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$. On a alors

$$4x - y = 4(t + 1) - (4t + 3) = 1.$$

Donc $(x, y) \in A$. D'où $C \subset A$.
Par double inclusion, on a bien $A = C$.

● ● ● ○ 14 A MAITRISER (mais plus dur) : Inclusion d'ensemble 5

Soit E, F, G trois ensembles. On suppose qu'il existe un élément de G noté 0_G. *Par exemple, ça peut être le 0 réel ; le 0 des matrices (i.e. la matrice nulle) ; la 0 des fonctions (i.e. la fonction nulle), etc....*
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
On définit

$$\mathrm{Ker}(g) = \{y \in F : g(y) = 0\}. \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in E\}.$$

On suppose que : $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = 0_G$. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Corrigé

Si on y va pas à pas, on ne peut pas se tromper.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Pour démontrer que $y \in \mathrm{Ker}(g)$, il faut démontrer que $g(y) = 0$. On calcule :

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0_G \text{ par hypothèse.}$$

On vient de démontrer que $g(y) = 0_G$. Donc, $y \in \mathrm{Ker}(g)$. D'où l'inclusion désirée.

● ● ○ ○ 15 Fonctions indicatrices

Soient E un ensemble et A une partie de E. On définit l'*indicatrice* de A comme l'application $\mathbf{1}_A$ de E dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in E, \quad \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E. Dans chacun des cas suivants, écrire f sous la forme $\mathbf{1}_C$, où C est une partie de E qu'on précisera.

1. $f = \mathbf{1} - \mathbf{1}_A$
2. $f = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$
3. $f = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$
4. $f = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$
5. $f = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$

Corrigé

1. Soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $f(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x) = 0$, et si $x \notin A$, alors $f(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x) = 1$. Ainsi, $f = \mathbf{1}_{\bar{A}}$.
2. Soit $x \in E$. On a $\min\big(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)\big) = 1$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$. Ainsi, $f = \mathbf{1}_{A \cap B}$.
3. Soit $x \in E$. On a $\max\big(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)\big) = 1$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$. Ainsi, $f = \mathbf{1}_{A \cup B}$.

4. Soit $x \in E$. On a $\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$. Donc, $f = \mathbf{1}_{A\cap B}$.

5. Soit $x \in E$. Si $x \notin A \cup B$, alors $f(x) = 0$. Si x appartient à un seul des deux ensembles A et B, alors $f(x) = 1$. Enfin, si $x \in A \cap B$, alors $f(x) = 1 + 1 - 1 = 1$. Ainsi, $f = \mathbf{1}_{A\cup B}$.

II - retour sur les applications

16 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? (si oui, déterminer leur application réciproque) :

1. $f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$
2. $f_2 : [-1, 1] \to [0, 1],\ x \mapsto |x|$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to]1, +\infty[,\ x \mapsto e^{-x} + 1$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],\ x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$

Corrigé

1. -1 n'a pas d'antécédent par f_1, donc f_1 n'est pas surjective. Soient maintenant $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $f_1(x) = f_1(y)$. On a donc $|x| = |y|$, donc $x = y$ puisque $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Donc f_1 est injective. Elle n'est donc pas bijective.

2. On a $f_2(-1) = f_2(1) = 1$, avec $-1 \neq 1$. Donc f_2 n'est pas injective.

   Soit maintenant $y \in [0, 1]$. En posant $x = y$, on a $x \in [-1, 1]$ et $f_2(x) = |x| = y$. Donc f_2 est surjective. Elle n'est donc pas bijective.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f_3(x) = f_3(y)$. On a $e^{-x} + 1 = e^{-y} + 1$, donc $e^{-x} = e^{-y}$. Par injectivité de la fonction exponentielle, $-x = -y$, donc $x = y$. Ainsi, f_3 est injective.

   Soit maintenant $y \in]1, +\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_3(x) = y$. On a $e^{-x} + 1 = y \iff e^{-x} = y - 1 \iff -x = \ln(y - 1) \iff x = -\ln(y - 1)$. Comme $y > 1$, on a $y - 1 > 0$, donc $x = -\ln(y - 1)$ est bien défini. Ainsi, tout élément de $]1, +\infty[$ possède un antécédent par f_3. Donc f_3 est surjective.

   Ainsi, f_3 est bijective et $f_3^{-1} :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad y \longmapsto -\ln(y - 1)$.

4. On a $f_4(0) = 1$ et $f_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, avec $0 \neq \frac{\pi}{2}$. Donc f_4 n'est pas injective.

   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_4(x) = \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Soit $y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Alors $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{2}}$. En posant $x = \theta - \frac{\pi}{4}$, on obtient $f_4(x) = \sqrt{2}\sin(\theta) = y$. Donc f_4 est surjective. Elle n'est donc pas bijective.

17 Une bijection explicite

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[, \quad x \mapsto e^{(\ln(x))^2}$.

Démontrer que f est une bijection et déterminer une expression de sa bijection réciproque.

Corrigé

On n'a pas besoin du premier point, mais je le refais pour vous montrer une preuve de l'injectivité.

- Soit $x, y \geq 1$. On a $f(x) = f(y) \Rightarrow e^{(\ln(x))^2} = e^{(\ln(y))^2} \Rightarrow (\ln(x))^2 = (\ln(y))^2$ par bijectivité de l'exponentielle. Puis, puisque $x, y \geq 1$ donc $\ln(x) \geq 0$ et $\ln(y) \geq 0$, on peut appliquer la bijectivité de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, donc $\ln(x) = \ln(y)$. Enfin, par bijectivité du logarithme, $x = y$. Donc, f est injective.
- Soit $y \in [1, +\infty[$ et $x \geq 1$. On a, en utilisant que les deux termes sont positifs lors du passage à la racine carrée,

  $$f(x) = y \iff e^{(\ln(x))^2} = y \iff (\ln(x))^2 = \ln(y) \iff \ln(x) = \sqrt{\ln(y)} \iff x = \exp(\sqrt{\ln(y)}).$$

  Donc, f est surjective (et même bijective, puisqu'on a trouvé un unique antécédent), d'inverse $f^{-1} : [1, +\infty[\to [1, +\infty[, y \to \exp(\sqrt{\ln(y)})$.

18 Application $x \mapsto e^{|x|} + 1$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{|x|} + 1$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J. On explicite les applications réciproques de ces deux bijections.

Corrigé

1. On a $f(-1) = f(1) = e + 1$, avec $-1 \neq 1$. Donc f n'est pas injective.

   De plus, 0 n'a pas d'antécédent par f, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{|x|} + 1 \geq 2$. Donc f n'est pas surjective.

2. On pose $J = [2, +\infty[$.

   Considérons d'abord la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Soient $y \in J$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $|x| = x$ et $y - 1 \geq 1 > 0$, on a

   $$f(x) = y \iff e^x + 1 = y \iff e^x = y - 1 \iff x = \ln(y - 1),$$

   la dernière équivalence provenant de la bijectivité de la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

   De plus, comme $y - 1 \geq 1$, on a $\ln(y - 1) \geq 0$. L'unique antécédent obtenu appartient donc bien à $\mathbb{R}_+$. Ainsi, la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans J, d'application réciproque $f_+^{-1} : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad y \longmapsto \ln(y - 1)$.

   C'est la même chose pour $\mathbb{R}_-$. Soient $y \in J$ et $x \in \mathbb{R}_-$. Comme $|x| = -x$ et $y - 1 \geq 1 > 0$, on a

   $$f(x) = y \iff e^{-x} + 1 = y \iff e^{-x} = y - 1 \iff -x = \ln(y - 1) \iff x = -\ln(y - 1).$$

   De plus, comme $\ln(y - 1) \geq 0$, on a $-\ln(y - 1) \leq 0$. L'unique antécédent obtenu appartient donc bien à $\mathbb{R}_-$. Ainsi, la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J, d'application réciproque $f_-^{-1} : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_-, \quad y \longmapsto -\ln(y - 1)$.

19 Application sur $\mathbb{Z}$

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ n \mapsto n + (-1)^n$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Calculer $f \circ f$. En déduire l'expression de la réciproque f^{-1} de f.
3. Résoudre l'équation $347 = n + (-1)^n$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Corrigé

1. Montrons d'abord que f est injective. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $f(n) = f(m)$.

   - Si n et m ont la même parité, alors $(-1)^n = (-1)^m$. Ainsi, $n + (-1)^n = m + (-1)^m$, donc $n = m$.
   - Si n et m n'ont pas la même parité, alors $f(n)$ et $f(m)$ n'ont pas la même parité, puisque f évaluée en un entier pair donne un entier impair, et que f évaluée en un entier impair donne un entier pair. Ils ne peuvent donc pas être égaux.

   Ainsi, f est injective.

   Montrons maintenant que f est surjective. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

   - Si p est pair, on pose $n = p + 1$. Alors n est impair et $f(n) = p + 1 + (-1)^{p+1} = p + 1 - 1 = p$.
   - Si p est impair, on pose $n = p - 1$. Alors n est pair et $f(n) = p - 1 + (-1)^{p-1} = p - 1 + 1 = p$.

   Dans tous les cas, p possède un antécédent par f. Donc f est surjective, et finalement bijective.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

   - Si n est pair, alors $f(n) = n + 1$ est impair. Ainsi, $f(f(n)) = f(n + 1) = n + 1 - 1 = n$.
   - Si n est impair, alors $f(n) = n - 1$ est pair. Ainsi, $f(f(n)) = f(n - 1) = n - 1 + 1 = n$.

   Donc $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. On en déduit que $f^{-1} = f$,

3. Comme f est bijective, l'équation admet une unique solution : $n = f^{-1}(347) = f(347) = 347 + (-1)^{347} = 346$.

20 Application $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

1. L'application f est-elle injective ?
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2) \iff a^2 - 4b \geq 0$.
3. L'application f est-elle surjective ?

Corrigé

1. Non ! $f(-1, 1) = f(1, -1)$ (les deux coordonnées sont symétriques sur $\mathbb{R}^2$: $f(x, y) = f(y, x)$.
2. On procède par double implication.

   - $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $a = x + y$ et $b = xy$, donc $a^2 - 4b = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = (x - y)^2 \geq 0$.
   - $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 - 4b \geq 0$. On résout le système suivant :

   $$f(x, y) = (a, b) \iff \begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases} \iff \begin{cases} y = a - x, \\ x(a - x) = b \end{cases} \iff \begin{cases} y = a - x, \\ x^2 - ax + b = 0. \end{cases}$$

   Le discriminant de la dernière équation vaut $a^2 - 4b \geq 0$. Elle a donc une ou deux solutions, et donc ce système est résoluble, donc $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$.

3. Non plus ! Par exemple, par la question précédente, $(0, 1)$ ne vérifie pas la seconde proposition, donc n'est pas un antécédent de f.

21 Composition de fonctions

Soient E, F, G trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$. On pose $h = g \circ f$. Montrer que :

1. si h est injective, alors f est injective,
2. si h est surjective, alors g est surjective,
3. si h est surjective et g injective, alors f est surjective,
4. si h est injective et f surjective, alors g est injective.

Corrigé

1. Supposons que h est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $h(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = h(y)$. Comme h est injective, on a $x = y$. Donc f est injective.
2. Supposons que h est surjective. Soit $z \in G$. Comme h est surjective, il existe $x \in E$ tel que $h(x) = z$. En posant $y = f(x) \in F$, on a $g(y) = g(f(x)) = h(x) = z$. Donc z possède un antécédent par g. Ainsi, g est surjective.
3. Supposons que h est surjective et que g est injective. Soit $y \in F$. On a $g(y) \in G$. Comme h est surjective, il existe $x \in E$ tel que $h(x) = g(y)$. Ainsi, $g(f(x)) = g(y)$. Comme g est injective, on a $f(x) = y$. Donc y possède un antécédent par f : f est surjective.
4. Supposons que h est injective et que f est surjective. Soient $y_1, y_2 \in F$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Comme f est surjective, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. On a alors $h(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2)) = h(x_2)$. Comme h est injective, on a $x_1 = x_2$. Donc $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. Ainsi, g est injective.

22 Fonction sur $\mathcal{P}(E)$

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \quad X \mapsto (X \cap A,\ X \cap B).$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Corrigé

1. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a $X \cap A \subset A$ et $X \cap B \subset B$. Donc $X \cap A \in \mathcal{P}(A)$ et $X \cap B \in \mathcal{P}(B)$: f est bien définie.
2. On procède par double implication.
   - $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est injective. On a $f(E) = (A, B)$. D'autre part, $f(A \cup B) = \big((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B\big) = (A, B)$. Ainsi, $f(E) = f(A \cup B)$. Par injectivité, $E = A \cup B$.
   - $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $A \cup B = E$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$. On a donc $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. Or

     $$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B)$$

     et, de même, $Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$. Donc $X = Y$. Ainsi, f est injective.

3. On procède par double implication.
   - $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est surjective. Comme $(A, \varnothing) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $X \cap A = A$ et $X \cap B = \varnothing$. Soit $x \in A \cap B$. Comme $x \in A = X \cap A$, on a $x \in X$. De plus, $x \in B$, donc $x \in X \cap B$, ce qui est impossible puisque $X \cap B = \varnothing$. Ainsi, $A \cap B = \varnothing$.
   - $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $A \cap B = \varnothing$. Soit $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On pose $X = C \cup D$. Comme $C \subset A$ et $D \subset B$, on a $D \cap A = \varnothing$ et $C \cap B = \varnothing$.
     Ainsi, $X \cap A = (C \cup D) \cap A = C$ et $X \cap B = (C \cup D) \cap B = D$. Donc $f(X) = (C, D)$. Ainsi, f est surjective.

23 Cardinal et bijection

Soit f une application de E dans F avec E et F de cardinal fini.

1. Si f est surjective, que peut-on en déduire sur $\text{Card}(E)$ et $\text{Card}(F)$?
2. Si f est injective, que peut-on en déduire sur $\text{Card}(E)$ et $\text{Card}(F)$?
3. Si f est bijective, que peut-on en déduire sur $\text{Card}(E)$ et $\text{Card}(F)$?

Corrigé

1. Puisque l'application est surjective, chaque élément de l'espace d'arrivée a au moins un antécédent. Donc, $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.
2. Puisque l'application est injective, $\#\Im f = \#E$. Donc, $\#E \leq \#F$.
3. Puisque l'application est bijective, elle est injective et surjective. Par les deux questions précédentes, $\#E = \#F$.

III Dénombrement

24 Dénombrement de matrice

1. Combien y a-t-il de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ composées de 2 "1" et de 7 "0" ?
2. Combien y a-t-il de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont chaque coefficient est à valeur dans $\{0, 1, 2\}$?
3. Combien y a-t-il de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec un "1" sur chaque ligne, et des 0 ailleurs ?
4. Combien y a-t-il de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec un "1" sur chaque ligne, et des 0 ailleurs ?

Corrigé

1. Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède 9 coefficients. Il suffit de choisir les deux emplacements contenant un 1 parmi les 9 emplacements. Les autres coefficients sont alors nécessairement nuls. Il y a donc $\binom{9}{2} = \dfrac{9 \times 8}{2} = 36$ matrices.
2. Une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possède 4 coefficients. Pour chacun de ces coefficients, on a 3 choix : 0, 1 ou 2. Il y a donc $3^4 = 81$ matrices.
3. Sur chacune des trois lignes, on choisit l'emplacement du 1. On a 3 choix sur chaque ligne. Il y a donc $3^3 = 27$ matrices.
4. De même, sur chacune des n lignes, on choisit l'emplacement du 1 parmi les n colonnes. Il y a donc n^n matrices.

25 Oral de Centrale 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\tau_n = \left\{A \in S_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \in \{0,1\} \text{ et } c_{11} + c_{22} + ... + c_{nn} = 0\right\}$.

1. Soit $M \in \tau_n$. Démontrer que la diagonale de M est composée uniquement de 0
2. Dénombrer le nombre de matrices de τ_2
3. Dénombrer le nombre de matrices de τ_3
4. Dénombrer le nombre de matrices de τ_4
5. *Un peu plus difficile.* Dénombrer le nombre de matrices de τ_n

Corrigé

1. Soit $M \in \tau_n$. Les coefficients diagonaux de M appartiennent à $\{0,1\}$ et $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0$.
   Comme tous les termes de cette somme sont positifs ou nuls, ils sont nécessairement tous nuls. Ainsi, $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$.
2. Une matrice de τ_2 est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \{0,1\}$.
   Il y a donc 2 matrices dans τ_2.
3. Une matrice de τ_3 est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \{0,1\}$.
   On a donc 2 choix indépendants pour chacun des trois coefficients a, b, c. Ainsi, $\text{card}(\tau_3) = 2^3 = 8$.
4. De même, pour une matrice de τ_4, les coefficients diagonaux sont nuls. Comme la matrice est symétrique, il suffit de choisir les coefficients situés strictement au-dessus de la diagonale.
   Il y en a $3 + 2 + 1 = 6$. Chacun peut être égal à 0 ou à 1. Ainsi, $\text{card}(\tau_4) = 2^6 = 64$.
5. De manière générale, une matrice de τ_n est symétrique et sa diagonale est nulle. Il suffit donc de choisir les coefficients situés strictement au-dessus de la diagonale.
   Il y en a $(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
   Chacun de ces coefficients peut être choisi indépendamment égal à 0 ou à 1. Les coefficients situés sous la diagonale sont ensuite imposés par symétrie. Ainsi, $\text{card}(\tau_n) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

26 Dénombrement de matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \leq n^2$. On note $\tau_n^k = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \in \{0,1\} \text{ et Il y a } k \text{ "1" dans la matrice } A\right\}$.

1. Dénombrer le nombre d'éléments de τ_2^3
2. Dénombrer le nombre d'éléments de τ_2^1
3. Dénombrer le nombre d'éléments de τ_n^k

Corrigé

1. Une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possède 4 coefficients. Pour obtenir exactement trois 1, il suffit de choisir les trois emplacements contenant un 1 parmi les quatre emplacements. Il y a donc $\text{card}(\tau_2^3) = \binom{4}{3} = 4$.
2. De même, il suffit de choisir l'unique emplacement contenant un 1 parmi les quatre coefficients de la matrice. Ainsi, $\text{card}(\tau_2^1) = \binom{4}{1} = 4$.
3. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède n^2 coefficients. Pour obtenir exactement k coefficients égaux à 1, il suffit de choisir les k emplacements contenant un 1 parmi les n^2 emplacements. Les autres coefficients sont alors nécessairement nuls.
   Ainsi, $\text{card}(\tau_n^k) = \binom{n^2}{k}$.

27 Dénombrement (cartes)

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

1. Aucune condition.
2. Il y a au moins un pique parmi les cinq cartes.
3. Il y a exactement deux valets.
4. Il y a un as et deux carreaux.
5. Il n'y a pas de carte en dessous de 9.
6. Les cinq cartes forment deux paires (mais pas de brelan).
7. Les cinq cartes sont de la même couleur.
8. Les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur).

Corrigé

Les tirages étant simultanés, on dénombre des parties à cinq éléments du jeu de cartes.

1. On choisit cinq cartes parmi les 32 cartes du jeu. Il y a donc $\binom{32}{5}$ tirages.
2. On compte par passage au complémentaire. Il y a 24 cartes qui ne sont pas des piques. Le nombre de tirages contenant au moins un pique est donc $\binom{32}{5} - \binom{24}{5}$
3. On choisit deux valets parmi les quatre, puis trois cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des valets. Il y a donc $\binom{4}{2}\binom{28}{3}$ tirages.
4. On distingue deux cas.
   - Soit l'as de carreau est tiré. On choisit alors un autre carreau parmi les sept carreaux restants, puis trois cartes qui ne sont ni des carreaux ni des as. Il y a $7\binom{21}{3}$ tirages.
   - Soit l'as de carreau n'est pas tiré. On choisit l'unique as parmi les trois as qui ne sont pas des carreaux, deux carreaux parmi les sept carreaux qui ne sont pas des as, puis deux cartes qui ne sont ni des carreaux ni des as. Il y a $3\binom{7}{2}\binom{21}{2}$ tirages.

5. Les cartes dont la valeur est supérieure ou égale à 9 sont les 9, les 10, les valets, les dames, les rois et les as. Il y en a donc $6 \times 4 = 24$. Le nombre de tirages est $\binom{24}{5}$.

6. On choisit les deux valeurs formant les paires parmi les huit valeurs possibles. Pour chacune de ces valeurs, on choisit deux couleurs parmi les quatre. Enfin, on choisit la valeur de la dernière carte parmi les six valeurs restantes, puis sa couleur. Il y a donc $\binom{8}{2}\binom{4}{2}^2 \times 6 \times 4$ tirages.

7. On choisit la couleur commune des cinq cartes, puis cinq valeurs parmi les huit valeurs disponibles. Il y a donc $4\binom{8}{5}$ tirages.

8. Il y a quatre suites possibles, commençant par $7, 8, 9, 10$. On choisit l'une de ces quatre suites et l'une des quatre couleurs. Il y a donc $4 \times 4 = 16$ quintes flush.

28 Dénombrement (tarot)

On tire 5 atouts dans un jeu de tarot. (22 cartes. Pour l'exercice, cela revient à prendre des cartes entre 1 et 22,) Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

1. Au moins un atout est multiple de 5.
2. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3.
3. On a tiré le 1 ou le 21.

Corrigé

Les tirages étant simultanés, on dénombre des parties à cinq éléments de $[\![1, 22]\!]$.

1. Les multiples de 5 compris entre 1 et 22 sont $5, 10, 15$ et 20. Il y en a donc quatre. On compte par passage au complémentaire : le nombre de tirages contenant au moins un multiple de 5 est $\binom{22}{5} - \binom{18}{5}$.

2. Les multiples de 5 sont $5, 10, 15, 20$, et les multiples de 3 sont $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$. On distingue deux cas.

   - Soit 15 est tiré. Il est à la fois l'unique multiple de 5 et l'unique multiple de 3. On choisit alors les quatre autres nombres parmi les 12 nombres qui ne sont multiples ni de 3 ni de 5. Il y a $\binom{12}{4}$ tirages.
   - Soit 15 n'est pas tiré. On choisit un multiple de 5 parmi $5, 10, 20$, un multiple de 3 parmi $3, 6, 9, 12, 18, 21$, puis trois nombres parmi les 12 nombres qui ne sont multiples ni de 3 ni de 5. Il y a $3 \times 6\binom{12}{3}$ tirages.

   Ainsi, le nombre de tirages est $\binom{12}{4} + 18\binom{12}{3}$.

3. On compte par passage au complémentaire. Il y a 20 nombres différents de 1 et de 21. Le nombre de tirages contenant le 1 ou le 21 est donc $\binom{22}{5} - \binom{20}{5}$.

29 Encore ! (clavier de digicode)

À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de douze touches :

- trois lettres (A, B et C),
- neuf chiffres non nuls $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.

Le code déclenchant l'ouverture de la porte peut être changé par le régisseur. Ce code est formé d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres.

1. Dans cette question, on considère que les trois chiffres du code ne sont pas forcément distincts. Combien de codes commençant par une lettre le régisseur peut-il proposer ?
2. Dans cette question, on considère que le code ne contient que des chiffres distincts. Combien de codes le régisseur peut-il proposer ?

Corrigé

1. On a trois choix pour le premier symbole, puis neuf choix pour le premier, second et troisième chiffre. On a donc $3 \times 9^3 = 3^7$ combinaisons.
2. Toujours trois choix pour le premier symbole, puis neuf, puis huit, puis sept choix pour le premier, second et troisième chiffre. On a donc $3 \times 9 \times 8 \times 7$ possibilités.

30 Anagrammes

Combien y a-t-il d'anagrammes de MAISON ? de RADAR ? de MISSISSIPPI ? d'ABRACADABRA ?

Corrigé

1. On a 6 choix pour la première lettre, puis 5, puis 4, puis 3, puis 2, puis 1. On a donc 6! anagrammes possibles de MAISON.
2. On place les deux "A" : on a $\binom{5}{2}$ places. Il reste 2 places parmi 3 pour les deux "R". On a donc $\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = 30$ possibilités.
3. Autre méthode : on a 11! manières d'ordonner les lettres. On doit diviser par 4! (le nombre de manière de placer les S), puis 4! (les I), puis 2! (les P). On a donc $\dfrac{11!}{4!4!2!} = \dfrac{11!}{24 \times 48}$.
4. On a $\binom{11}{5}$ manières de placer les A, puis $\binom{6}{2}$ manières de placer les B, puis $\binom{4}{2}$ manières de placer les R, puis 2 manières de placer le D. (le C est placé dans la dernière position). On a donc $\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2$ manières.

31 Recrutement de Trader quantitatif

Vous êtes le gestionnaire de portefeuille d'un fonds d'une valeur de 75 millions de dollars. Votre fonds peut être investi dans 5 classes d'actifs possibles :

1. Cryptomonnaies[1]

[1] Monnaies numériques décentralisées reposant sur la technologie de la blockchain. Exemples : Bitcoin, Ethereum.

2. Contrats événementiels[2]

3. Produit à revenu fixe[3]

4. Contrat à terme sur matières premières[4]

5. Option sur actions[5]

De combien de façons différentes pouvez-vous investir l'ensemble des 75 millions de dollars dans ces cinq classes d'actifs, en utilisant uniquement des paliers de 1 million de dollars ?

Par exemple, une stratégie d'investissement possible serait :

1. Options sur actions : 7 millions de dollars

2. Contrats à terme sur matières premières : 35 millions de dollars

3. Produits de revenu fixe : 20 millions de dollars

4. Contrats événementiels : 12 millions de dollars

5. Cryptomonnaies : 1 million de dollars

Seconde question Et maintenant, combien y a-t-il de manières si l'on impose d'avoir au moins 5 millions de dollars dans chaque classe d'actifs ?

Corrigé

Le problème revient donc à celui de savoir comment placer 75 balles dans 5 sceaux. la méthode pour dénombrer cela est de mettre les 75 balles côte à côte, puis de placer 4 "traits" dans cette ligne de 75 points, en incluant les positions tout à gauche et tout à droite.

Le problème revient donc à répartir 75 unités identiques dans 5 classes.

On représente les 75 unités par 75 symboles $\circ$, et on place 4 séparateurs $|$ pour découper cette suite en 5 paquets. Par exemple, avec 10 boules et 3 seaux, la configuration

$$\circ\circ\circ|\ \circ\circ|\ \circ\circ\circ\circ\circ$$

correspond à la répartition $(3, 2, 5)$.

On autorise aussi qu'un seau soit vide, ce qui correspond à deux séparateurs consécutifs, ou à un séparateur en début ou en fin de ligne. Par exemple,

$$|\ \circ\circ\circ\circ|\ \circ\circ\circ\circ\circ\circ$$

correspond à $(0, 4, 6)$, et

$$\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\ ||$$

correspond à $(10, 0, 0)$.

Ainsi, chaque répartition correspond à un mot formé de 75 symboles $\circ$ et de 4 symboles $|$, et réciproquement.

Il y a donc autant de répartitions que de façons de choisir les positions des 4 séparateurs parmi les 79 symboles. On obtient $\binom{79}{4}$. Il y a donc $\binom{79}{4}$ manières d'investir les 75 millions de dollars.

Pour l'autre exemple, après avoir mis les 5 millions de dollars dans chaque classe, il nous en reste 50. Un raisonnement similaire nous donne qu'il y a $\binom{54}{5}$ positions possibles.

[2]Instruments financiers dont la valeur dépend de la réalisation (ou non) d'un événement spécifique. Exemple : contrat lié au résultat d'une élection ou à la météo.

[3]Actifs financiers qui rapportent un revenu régulier et prédéterminé. Exemples : obligations d'État, obligations d'entreprises.

[4]Contrat standardisé engageant à acheter ou vendre une matière première à une date future et à un prix fixé d'avance. Exemples : pétrole, or, blé.

[5]Droit (et non obligation) d'acheter ou de vendre une action à un prix déterminé avant une certaine échéance.

● ● ● ● 32 Recrutement de Trader quantitatif

Combien y-a-t-il d'entiers plus petit que 1 million tel que la somme de ses chiffres fasse 19 ?[6]

Corrigé

C'est le problème le plus dur de la feuille !

On cherche ici le nombre de solutions à l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 19,$$

où x_i représente le chiffre de la $i-$ème position. $x_i \in [\![0, 9]\!]$.

Pour calculer cela, on va tout d'abord compter le nombre de solutions où un chiffre peut dépasser 9. On résout donc simplement l'équation

$$x_1 + x_2 + 3 + x_4 + x_5 + x_6 = 19,$$

où $x_i \in \mathbb{N}$. On met donc 19 cercles $\circ$ de côté, puis on place 5 délimiteurs $|$. On a donc $\binom{24}{5}$ manières d'atteindre une somme valant 19.

Par exemple, la configuration

$$\underbrace{\circ\circ\circ}_{x_1=3} | \underbrace{\ }_{x_2=0} | \underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ}_{x_3=5} | \underbrace{\circ\circ}_{x_4=2} | \underbrace{\circ}_{x_5=1} | \underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ}_{x_6=8}$$

correspond à la solution 305218. Le vide entre deux délimiteurs signifie que le chiffre correspondant vaut 0.

Il faut maintenant retrancher les configurations où un chiffre dépasse 9, i.e. vaut 10 ou plus. Puisque la somme des chiffres vaut 19, dans une telle configuration, un seul des x_i peut être supérieur ou égal à 10 (6 choix). Une fois celui-ci choisi, il nous reste 9 unités à placer parmi 6 chiffre, soit, avec la méthode ci-dessus, $\binom{14}{5}$.

Il y a donc $\binom{24}{5} - 6\binom{14}{5}$ configurations totales.

● ● ○ ○ 33 Recrutement de Trader quantitatif

Vous lancez 3 dés 6 équilibrés, un bleu, un rouge et un noir. Quel est le nombre de configurations où les chiffres apparaissent dans un ordre strictement croissant ? Et quel est le nombre total de configurations ?

Corrigé

Pour le nombre total de configuration, on a 6^3 possibilités. Pour le nombre où l'ordre est strictement croissant, il faut déjà que les trois dés soient identiques, soit $6 \times 5 \times 4$ possibilités. Ensuite, un a une seule configuration parmi les 3! possibles où les dés sont dans l'ordre strictement croissant. Cette probabilité vaut donc $\dfrac{6 \times 5 \times 4}{6^3 \times 3!} = \dfrac{5}{54}$.

● ● ○ ○ 34 Recrutement de Trader quantitatif

Vous allez voir un marchand de glace, qui a 10 parfums de glace. On peut prendre jusqu'à 3 boules. Combien de glaces différentes pouvez-vous créer ? On suppose qu'il faut prendre au moins un parfum.

[6] Eh oui ! Sur `https://openquant.co`, on peut voir des questions de recrutement pour faire du Trading quantitatif. C'est un problème niveau 7/10.

Corrigé

On va distinguer sur le nombre de boules achetées.

- Si on prend une boule, on a 10 choix.
- Si on prend deux boules, on a $10 + \binom{10}{2}$ choix (le nombre de paire de boule identique + deux parfums différents).
- Si on prend trois boules, on a distingue selon qu'on prenne trois boules de parfums distincts, deux boules identiques et une autre, ou trois boules identiques.
  - Si on prend 3 parfums distincts, on a $\binom{10}{3}$ possibilités.
  - Si on prend deux parfums distincts, on a $\binom{10}{2}$ possibilités. Il faut ensuite choisir le parfum qui a deux boules de glace, donc cela double le nombre : $2 \times \binom{10}{2}$.
  - Trois boules identiques donnent 10 choix.

On a donc $10 + 10 + \binom{10}{2} + 10 + \binom{10}{3} + 2\binom{10}{2}$ choix.

P.S. : Avec la même méthode que l'exercice des actifs, on pourrait retrouver le fait de placer, pour le choix de trois boules de glace dans 10 parfums, neuf traits et 3 cercles. En effet, formellement, on cherche le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^{10}$ à l'équation

$$x_1 + ... + x_{10} = 3.$$

On se donne donc 3 $\circ$, et 9 délimiteurs $|$. Le nombre de "mot" faisable est $\binom{12}{9} = \binom{12}{3}$: on retombe sur le nombre de configuration $10 + \binom{10}{3} + 2\binom{10}{2}$.

35 Recrutement de Trader quantitatif

On plonge un cube fait de 10 petits cubes blancs de longueur dans de la peinture, puis on le ressort. Combien de cubes sont encore blancs ?

Corrigé

Tous les petits cubes extérieurs sont touchés. Il reste donc un cube de 8 petits cubes de côté intact (l'intérieur du gros cube), soit 512 cubes encore blancs.