DS de calcul – Approfondissement

Toutes les réponses devront être justifiées. Les résultats finaux devront être clairement encadrés.

Exercice 1 – Sommes et produits

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

1. Déterminer a, b, c trois réels tel que, pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. Pour $n \geq 2$, calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
4. Calculer, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.
5. *Thomas* Calculer, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 2^k (-3)^k$.

Exercice 2 – Dérivation et étude de fonctions

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes des intervalles constituant D_f.
3. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.
4. En déduire une expression de $f(x)$ en fonction de $\arctan(x)$, en distinguant les différents cas. *(Une primitive pourra être trouvée... A une constante près !)*
5. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3 – Une puissance de matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Dans cet exercice, on cherche à calculer A^n.
On pose $N = A - 2I_3$.

1. Calculer N, N^2, et N^3. En déduire N^p pour tout $p \geq 3$.
2. En utilisant la formule du binôme, calculer A^n en fonction de n.

Exercice 4 – Suite récurrente

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de f.
   (b) Déterminer le sens de variation de f sur son ensemble de définition et dresser son tableau de variations complet.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2+u_n+1} \end{cases}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul p, $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p+1}$.
   (b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
   (d) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
   (e) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (f) i. Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
   ii. En déduire que, pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.
   iii. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n$.
   (g) Montrer alors que, pour $n \geq 2$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$.
   (h) À l'aide des résultats précédents, montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.