1 Résolution de systèmes linéaires

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

(a) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x-2y+3z=-5 \\ 2x+y+5z=-3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+4y-6z=1 \\ x+y-2z=2 \\ -x-3y+5z=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x+3y-2z=3 \\ 3x+2y+z=6 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ 3x-8y+5z=5 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+3y-z=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3x+3y-2z=4 \\ x+2y-3z=2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x-2y+5z-3t=1 \\ 2x+3y+z-4t=1 \\ 3x+8y-3z-5t=1 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$

2. Soient a, b, c trois réels fixés. Résoudre le système $\begin{cases} x+2y-z=a \\ -2x-3y+3z=b \\ x+y-2z=c \end{cases}$

2 Système paramétré

Résoudre le système suivant en fonction de la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^2z=1 \end{cases}$

3 Autres systèmes

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \dfrac{2}{5x+2y}+\dfrac{7}{7x+3y}=7 \\ \dfrac{1}{5x+2y}+\dfrac{3}{7x+3y}=4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2y^4=2 \\ \dfrac{x^4}{y^2}=8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 8^x=10y \\ 2^x=5y \end{cases}$

4 Système et paramètre λ

On considère un réel λ et le système suivant : $\begin{cases} (2-\lambda)x+4z=0 \\ 3x-(4+\lambda)y+12z=0 \\ x-2y+(5-\lambda)z=0 \end{cases}$

Pour quelles valeurs de λ le système admet-il une unique solution ?

5 Âge

J'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, ensemble nous aurons 98 ans. Quel est mon âge ?

6 Un classique

On note $J = (1)$ la matrice composée uniquement de 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer J^2. En déduire un réel a tel que $J^2 = aJ$.
2. On pose $M = I_n + J$. Calculer M^2, puis en déduire λ, μ deux réels tels que $M^2 - \lambda M - \mu I_n = 0$.
3. En déduire que M est inversible, et calculer M^{-1}.
4. Démontrer par récurrence et à l'aide de la question 2. qu'il existe, pour tout $p \in \mathbb{N}$, u_p et v_p tels que $M^p = u_p M + v_p I_n$.
5. *Bonus.* A l'aide de la question précédente, trouver une relation de récurrence entre v_{p+1} et v_p ; et entre u_{p+1} et u_p.
6. *Bonus.* En déduire une relation de récurrence entre u_{p+2} et u_{p+1} et u_p. Puis, calculer u_p en fonction de p, et en déduire v_p en fonction de p.

7 Inversibilité

Soit a un réel. À quelle condition sur a la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

8 Matrices inversibles . Pivot de Gauss

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse lorsqu'elle existe :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9 Matrice anti-diagonale

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On introduit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \iddots & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels non nuls.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire le système $AX = Y$ puis le résoudre.
2. En déduire que A est inversible et calculer l'inverse de A.

10 Décomposition en éléments simples

1. Trouver $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que pour tout réel x différent de $-2, -1, 0$ et 1,
$$\frac{2x^3+2x^2+6x+4}{(x^2-1)(x^2+2x)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x-1}.$$
2. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{2x^3+2x^2+6x+4}{(x^2-1)(x^2+2x)}$ sur $]1, +\infty[$.

11 Décomposition en élément simple

On cherche, pour chaque question, à écrire la fraction proposée sous la forme d'une somme plus simple, puis à exploiter cette écriture pour calculer la somme partielle correspondante.

1. Trouver a et b tels que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$. En déduire la valeur de $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. Trouver a et b tels que $\frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$. En déduire la valeur de $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.
3. Trouver a et b tels que $\frac{2}{n(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2}$. En déduire la valeur de $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)}$.
4. Trouver a, b et c tels que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$. En déduire $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
5. Trouver a, b et c tels que $\frac{2}{(n-1)n(n+1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$. En déduire $S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$.

12 Lemme d'Hadamard

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait : $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

On dit que A est une matrice à *diagonale strictement dominante*. Montrer que la matrice A est inversible.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant une matrice colonne X non nulle telle que $AX = 0$.

13 Un polynôme matriciel pour calculer un inverse

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Pour chacune de ces matrices, notée M, répondre aux questions suivantes.

1. Calculer M^2.
2. En déduire deux réels λ et μ tels que $M^2 + \lambda M + \mu I_2 = 0$.
3. En déduire que M est inversible, puis déterminer explicitement M^{-1}.

14 Des polynômes matriciels en dimension trois

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2.
   (b) Déterminer deux réels λ et μ tels que $A^2 + \lambda A + \mu I_3 = 0$.
   (c) En déduire que A est inversible, puis déterminer explicitement A^{-1}.
2. (a) Calculer B^2 et B^3.
   (b) Déterminer trois réels λ, μ et ν tels que $B^3 + \lambda B^2 + \mu B + \nu I_3 = 0$.
   (c) En déduire que B est inversible, puis exprimer B^{-1} comme une combinaison linéaire de B^2, B et I_3.
   (d) Déterminer explicitement B^{-1}.

15 Noyau et inversibilité

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $\ker A$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Justifier.
2. (a) Calculer $\ker A$.
   (b) La matrice B est-elle inversible ? Justifier.

16 Des systèmes linéaires en dimension deux

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Résoudre le système $AX = 2X$.
   (b) Résoudre le système $AX = -X$.
2. (a) Résoudre le système $BX = 0$.
   (b) Résoudre le système $BX = 3X$.

17 Des systèmes linéaires en dimension trois

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Résoudre le système $AX = X$.
   (b) Résoudre le système $AX = 4X$.
2. (a) Résoudre le système $BX = -2X$.
   (b) Résoudre le système $BX = X$.

• • • • 18 Introduction aux valeurs propres

Dans cet exercice, on introduit une nouvelle notion : les valeurs propres d'une matrice.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.

Un tel vecteur X est appelé un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.

On notera $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = \lambda X\}$ le *sous-espace-propre* associé à λ.

Partie I - Recherche de valeurs propres

1. Montrer qu'un réel λ est une valeur propre de A si et seulement si le système $(A - \lambda I_n)X = 0$ admet une solution non nulle.
2. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour chacune de ces matrices :
   (a) Déterminer toutes ses valeurs propres.
   (b) Pour chaque valeur propre, déterminer tous les vecteurs propres associés.

Partie II - Premières propriétés

Dans toute cette partie, $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. **Valeurs propres et inversibilité.**
   (a) Démontrer que $\ker A = E_0$
   (b) Montrer que A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A.
   (c) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Soient λ une valeur propre de A et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda + \alpha$ est une valeur propre de $A + \alpha I_n$.
3. Soit λ une valeur propre de A, et $\mu \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mu\lambda$ est une valeur propre de μA.
4. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, λ^p est une valeur propre de A^p.
5. **Valeurs propres de l'inverse.**
   On suppose que A est inversible et on considère une valeur propre λ de A.
   (a) Montrer que $\lambda \neq 0$.
   (b) Montrer que $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}.

Partie III - Valeurs propres de matrices particulières

1. **Matrices diagonales.**
   Soit D une matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.
   Montrer que les valeurs propres de D sont exactement les réels $d_1, \ldots, d_n$. On calculera à cet effet $D \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_1, ..., x_n$ quelconque.
   Notez que les valeurs propres d'une matrice diagonale sont les éléments de la diagonale, donc.
2. **Matrices triangulaires supérieures.**
   Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure : $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ distinct de tous les coefficients diagonaux de T. Montrer que $T - \lambda I_n$ est inversible.
En déduire que λ n'est pas une valeur propre de T.

(b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $T - t_{ii} I_n$ n'est pas inversible. En déduire que t_{ii} est une valeur propre de T.

(c) En déduire que les valeurs propres de T sont exactement ses coefficients diagonaux.

3. **Matrices semblables.**

Soient $A, D \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

(a) Soit λ une valeur propre de D et X un vecteur propre associé.
Montrer que PX est un vecteur propre de A associé à λ.

(b) En utilisant l'égalité $D = P^{-1}AP$, montrer que A et D ont exactement les mêmes valeurs propres.

Partie IV - Pour aller plus loin

1. **Utilisation d'une relation polynomiale.**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 - 3A + 2I_n = 0$.

(a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
Montrer que $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)X = 0$.

(b) En déduire que les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 2.

(c) Est-il nécessaire que 1 et 2 soient toutes les deux valeurs propres de A ? Justifier.

2. **Valeurs propres de AB et BA.**

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de AB, et X un vecteur propre associé.
Montrer que BX est non nul, puis que $BA(BX) = \lambda BX$.

(b) En déduire que toute valeur propre non nulle de AB est une valeur propre de BA.

(c) Montrer que AB et BA ont exactement les mêmes valeurs propres non nulles.

3. **Une matrice sans valeur propre réelle.**

On considère la matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer R^2.

(b) En supposant que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de R, montrer que $\lambda^2 = -1$.

(c) En déduire que R n'admet aucune valeur propre réelle.