1 Résolution de systèmes linéaires

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

(a) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x-2y+3z=-5 \\ 2x+y+5z=-3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+4y-6z=1 \\ x+y-2z=2 \\ -x-3y+5z=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x+3y-2z=3 \\ 3x+2y+z=6 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ 3x-8y+5z=5 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+3y-z=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3x+3y-2z=4 \\ x+2y-3z=2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x-2y+5z-3t=1 \\ 2x+3y+z-4t=1 \\ 3x+8y-3z-5t=1 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$

2. Soient a, b, c trois réels fixés. Résoudre le système $\begin{cases} x+2y-z=a \\ -2x-3y+3z=b \\ x+y-2z=c \end{cases}$

Corrigé

1. (a)

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x-2y+3z=-5 \\ 2x+y+5z=-3 \end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -4y+2z=-8 \\ -3y+3z=-9 \end{cases}$$

$$\overset{\substack{L_2\leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3\leftarrow -\frac{1}{3}L_3}}{\iff} \begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2y-z=4 \\ y-z=3 \end{cases}$$

$$\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_3}{\iff} \begin{cases} x+2y+z=3 \\ z=-2 \\ y-z=3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}.$$

Donc, $S=\{(3,1,-2)\}$.

(b)

$$\begin{cases} x+4y-6z=1 \\ x+y-2z=2 \\ -x-3y+5z=0 \end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\iff} \begin{cases} x+4y-6z=1 \\ -3y+4z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \overset{L_2\leftarrow L_2+3L_3}{\iff} \begin{cases} x+4y-6z=1 \\ z=4 \\ y-z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=5 \\ y=5 \\ z=4 \end{cases}.$$

Donc, $S=\{(5,5,4)\}$.

(c)

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=3 \\ 3x+2y+z=6 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+3y-2z=3 \\ -5y+8z=3 \\ -8y+7z=-1 \end{cases}$$

$$\overset{L_3\leftarrow 5L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+3y-2z=3 \\ -5y+8z=3 \\ -40y+35z=-5 \end{cases}$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3-8L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+3y-2z=3 \\ -5y+8z=3 \\ -29z=-29 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}.$$

Donc, $S=\{(1,1,1)\}$.

(d)

$$\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ 3x-8y+5z=5 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow 2L_3-3L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ -7y+7z=4 \\ 7y-7z=-4 \end{cases}$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ -7y+7z=4 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\overset{L_2\leftarrow -\frac{1}{7}L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ y-z=-\frac{4}{7} \\ 0=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=z+\frac{1}{7} \\ y=z-\frac{4}{7} \end{cases}.$$

Donc, $S=\{(z+\dfrac{1}{7}, z-\dfrac{4}{7}, z) : z\in\mathbb{R}\}$.

(e)

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+3y-z=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3y+z=1 \\ 3y+z=1 \end{cases}$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3y+z=1 \\ 0=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}z+\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z \end{cases}.$$

Donc, $S=\{(\dfrac{2}{3}z+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}z, z) : z\in\mathbb{R}\}$.

(f)

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3x+3y-2z=4 \\ x+2y-3z=2 \end{cases} \overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y-3z=3 \\ x+2y-3z=2 \end{cases} \overset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y-3z=3 \\ 0=-1 \end{cases}.$$

Ainsi, ce système n'admet aucune solution. Donc, $S=\varnothing$.

(g)

$$\begin{cases} x-2y+5z-3t=1 \\ 2x+3y+z-4t=1 \\ 3x+8y-3z-5t=1 \\ x+y+z+t=0 \end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-3L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\iff}} \begin{cases} x-2y+5z-3t=1 \\ 7y-9z+2t=-1 \\ 14y-18z+4t=-2 \\ 3y-4z+4t=-1 \end{cases}$$

$$\underset{}{\overset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\iff}} \begin{cases} x-2y+5z-3t=1 \\ 7y-9z+2t=-1 \\ 0=0 \\ 3y-4z+4t=-1 \end{cases}$$

$$\underset{}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_4}{\iff}} \begin{cases} x-2y+5z-3t=1 \\ y-z-6t=1 \\ 0=0 \\ 3y-4z+4t=-1 \end{cases}$$

$$\underset{}{\overset{L_4\leftarrow L_4-3L_2}{\iff}} \begin{cases} x-2y+5z-3t=1 \\ y-z-6t=1 \\ 0=0 \\ -z+22t=-4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-51t-9 \\ y=28t+5 \\ z=22t+4 \end{cases}.$$

Donc, $S=\{(-51t-9, 28t+5, 22t+4, t) : t\in\mathbb{R}\}$.

2.

$$\begin{cases} x+2y-z=a \\ -2x-3y+3z=b \\ x+y-2z=c \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2+2L_1}{\iff}} \begin{cases} x+2y-z=a \\ y+z=2a+b \\ -y-z=c-a \end{cases} \underset{}{\overset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff}} \begin{cases} x+2y-z=a \\ y+z=2a+b \\ 0=a+b+c \end{cases}.$$

Ainsi, si $a+b+c\neq 0$, le système n'admet aucune solution. Donc, $S=\varnothing$.

Si $a+b+c=0$, on obtient $\begin{cases} x=-3a-2b+3z \\ y=2a+b-z \end{cases}$. Donc, $S=\{(-3a-2b+3z, 2a+b-z, z) : z\in\mathbb{R}\}$.

2 Système paramétré

Résoudre le système suivant en fonction de la valeur du paramètre $m\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^2z=1 \end{cases}$

Corrigé

$$\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^2z=1 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-mL_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-mL_1}{\iff}} \begin{cases} x-my+m^2z=m \\ m(1-m^2)z=1-m^2 \\ (1+m^2)y-m^2(m+1)z=1-m^2 \end{cases}.$$

Distinguons alors plusieurs cas selon ce qui apparaît à la seconde équation.

- Si $m = 0$, la deuxième équation devient $0 = 1$. Le système n'admet donc aucune solution. Donc, $S = \varnothing$.
- Si $m = 1$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}.$$

  Donc, $S = \{(1, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
- Si $m = -1$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - z \\ y = 0 \end{cases}.$$

  Donc, $S = \{(-1 - z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
- Si $m \notin \{-1, 0, 1\}$, la deuxième équation donne $z = \dfrac{1}{m}$. On obtient alors

$$\begin{cases} x = \dfrac{m(m+1)}{m^2+1} \\ y = \dfrac{m+1}{m^2+1} \\ z = \dfrac{1}{m} \end{cases}.$$

  Donc, $S = \left\{\left(\dfrac{m(m+1)}{m^2+1}, \dfrac{m+1}{m^2+1}, \dfrac{1}{m}\right)\right\}$.

3 Autres systèmes

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \dfrac{2}{5x+2y} + \dfrac{7}{7x+3y} = 7 \\ \dfrac{1}{5x+2y} + \dfrac{3}{7x+3y} = 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2y^4 = 2 \\ \dfrac{x^4}{y^2} = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$

Corrigé

1. On pose $X = \dfrac{1}{5x+2y}$ et $Y = \dfrac{1}{7x+3y}$. Le système devient

$$\begin{cases} 2X + 7Y = 7 \\ X + 3Y = 4 \end{cases} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} Y = -1 \\ X + 3Y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} X = 7 \\ Y = -1 \end{cases}.$$

   Ainsi,

$$\begin{cases} 5x + 2y = \dfrac{1}{7} \\ 7x + 3y = -1 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow 5L_2 - 7L_1}{\iff} \begin{cases} 5x + 2y = \dfrac{1}{7} \\ y = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{17}{7} \\ y = -6 \end{cases}.$$

   Donc, $S = \left\{\left(\dfrac{17}{7}, -6\right)\right\}$.

2. Les deux équations imposent $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On pose $X = \ln(|x|)$ et $Y = \ln(|y|)$. En prenant le logarithme des deux équations, on obtient

$$\begin{cases} 2X + 4Y = \ln(2) \\ 4X - 2Y = 3\ln(2) \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} 2X + 4Y = \ln(2) \\ -10Y = \ln(2) \end{cases} \iff \begin{cases} X = \dfrac{7}{10}\ln(2) \\ Y = -\dfrac{1}{10}\ln(2) \end{cases}.$$

Ainsi, $|x| = 2^{7/10}$ et $|y| = 2^{-1/10}$. Donc, $S = \{(\varepsilon 2^{7/10}, \eta 2^{-1/10}) : \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}\}$.

3. On pose $X = 2^x$ et $Y = 5y$. On remarque que $X > 0$. Le système devient

$$\begin{cases} X^3 = 2Y \\ X = Y \end{cases} \iff \begin{cases} X^3 = 2X \\ X = Y \end{cases}.$$

Comme $X > 0$, on obtient $X^2 = 2$, donc $X = Y = \sqrt{2}$. Ainsi, $2^x = \sqrt{2}$ et $5y = \sqrt{2}$, d'où $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{5} \end{cases}$.

Donc, $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right\}$.

4 Système et paramètre λ

On considère un réel λ et le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} (2-\lambda)x + 4z = 0 \\ 3x - (4+\lambda)y + 12z = 0 \\ x - 2y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de λ le système admet-il une unique solution ?

Corrigé

Le système étant homogène, il admet toujours la solution $(0, 0, 0)$. Cherchons à quelle condition celle-ci est unique.

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 4z = 0 \\ 3x - (4+\lambda)y + 12z = 0 \\ x - 2y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x - 2y + (5-\lambda)z = 0 \\ 3x - (4+\lambda)y + 12z = 0 \\ (2-\lambda)x + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_1}}{\iff} \begin{cases} x - 2y + (5-\lambda)z = 0 \\ (2-\lambda)y + 3(\lambda-1)z = 0 \\ 2(2-\lambda)y + (-\lambda^2 + 7\lambda - 6)z = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} x - 2y + (5-\lambda)z = 0 \\ (2-\lambda)y + 3(\lambda-1)z = 0 \\ -\lambda(\lambda-1)z = 0 \end{cases}.$$

Si $\lambda \notin \{0, 1, 2\}$, la troisième équation donne $z = 0$, puis la deuxième donne $y = 0$ et enfin $x = 0$. Le système admet donc une unique solution : $S = \{(0, 0, 0)\}$.

Pour $\lambda \in \{0, 1, 2\}$, on obtient :

- Si $\lambda = 0$, le système est équivalent à $x = -2z$ et $y = \frac{3}{2}z$. Donc, $S = \{(-2z, \frac{3}{2}z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

- Si $\lambda = 1$, le système est équivalent à $x = -4z$ et $y = 0$. Donc, $S = \{(-4z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
- Si $\lambda = 2$, le système est équivalent à $x = 2y$ et $z = 0$. Donc, $S = \{(2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$.

Dans chacun de ces trois cas, le système admet une infinité de solutions.

Ainsi, (S) admet une unique solution si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$.

5 Âge

J'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, ensemble nous aurons 98 ans. Quel est mon âge ?

Corrigé

On note x l'âge de la première personne, et y celui de la seconde. La première équation est $x = 3(y-(x-y))$ et la seconde $x + x + (x - y) = 98$. Ainsi,

$$\begin{cases} x = 3\big(y - (x-y)\big) \\ 3x - y = 98 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - y = 98 \end{cases} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\iff} \begin{cases} -7x = -294 \\ 3x - y = 98 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 42 \\ y = 28 \end{cases}.$$

Donc, $S = \{(42, 28)\}$. La première personne a donc 42 ans et la seconde 28 ans.

6 Un classique

On note $J = (1)$ la matrice composée uniquement de 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer J^2. En déduire un réel a tel que $J^2 = aJ$.
2. On pose $M = I_n + J$. Calculer M^2, puis en déduire λ, μ deux réels tels que $M^2 - \lambda M - \mu I_n = 0$.
3. En déduire que M est inversible, et calculer M^{-1}.
4. Démontrer par récurrence et à l'aide de la question 2. qu'il existe, pour tout $p \in \mathbb{N}$, u_p et v_p tels que $M^p = u_p M + v_p I_n$.
5. *Bonus.* A l'aide de la question précédente, trouver une relation de récurrence entre v_{p+1} et v_p ; et entre u_{p+1} et u_p.
6. *Bonus.* En déduire une relation de récurrence entre u_{p+2} et u_{p+1} et u_p. Puis, calculer u_p en fonction de p, et en déduire v_p en fonction de p.

Corrigé

1. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $(J^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} 1 \times 1 = n$. Ainsi, $J^2 = nJ$ et on peut prendre $a = n$.
2. On a $M^2 = (I_n + J)^2 = I_n + 2J + J^2 = I_n + (n+2)J$. Comme $J = M - I_n$, on obtient $M^2 = (n+2)M - (n+1)I_n$. Ainsi, $\lambda = n + 2$ et $\mu = -(n+1)$ conviennent.
3. La relation précédente donne $M((n+2)I_n - M) = (n+1)I_n$. Comme $n + 1 \neq 0$, M est inversible et
$$M^{-1} = \frac{(n+2)I_n - M}{n+1} = I_n - \frac{1}{n+1}J.$$
4. Pour $p \in \mathbb{N}$, soit $P(p)$: il existe deux réels u_p, v_p tels que $M^p = u_p M + v_p I_n$.
   - **Initialisation.** $M^0 = I_n = 0M + 1I_n$. On prend donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.

- **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $P(p)$ soit vraie. Alors,

$$\begin{aligned} M^{p+1} &= M(u_pM + v_pI_n) = u_pM^2 + v_pM \\ &= u_p((n+2)M - (n+1)I_n) + v_pM \\ &= ((n+2)u_p + v_p)M - (n+1)u_pI_n. \end{aligned}$$

  On peut donc prendre $u_{p+1} = (n+2)u_p + v_p$ et $v_{p+1} = -(n+1)u_p$. Ainsi, $P(p+1)$ est vraie.

5. La construction précédente donne, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{p+1} = (n+2)u_p + v_p \\ v_{p+1} = -(n+1)u_p. \end{cases}$ Il s'agit de deux relations couplées. On peut aussi obtenir des relations faisant intervenir une seule suite : comme

$$u_{p+1} + v_{p+1} = u_p + v_p,$$

on a $u_p + v_p = u_0 + v_0 = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ainsi, $u_{p+1} = (n+1)u_p + 1$ et $v_{p+1} = (n+1)v_p - (n+1)$.

6. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$u_{p+2} = (n+2)u_{p+1} + v_{p+1} = (n+2)u_{p+1} - (n+1)u_p.$$

L'équation caractéristique est $r^2 - (n+2)r + (n+1) = 0$, soit $(r-1)(r-(n+1)) = 0$. Comme $n \geq 1$, les racines sont distinctes. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u_p = \alpha + \beta(n+1)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Or, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, donc $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + (n+1)\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{n} \\ \beta = \frac{1}{n}. \end{cases}$ Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$u_p = \frac{(n+1)^p - 1}{n} \qquad \text{et} \qquad v_p = 1 - u_p = \frac{n+1-(n+1)^p}{n}.$$

7 Inversibilité

Soit a un réel. À quelle condition sur a la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Corrigé

La matrice A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}A \iff \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ (1-a)(x-y) = 0 \\ (1-a)(x-z) = 0 \end{cases}$$

- Si $a = 1$, le système est équivalent à $x + y + z = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}A = \{(-y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. Le noyau n'est donc pas réduit à $\{0\}$, et A n'est pas inversible.
- Si $a \neq 1$, alors $x = y = z$. La première équation devient $(a+2)x = 0$.
  - Si $a = -2$, on a $\mathrm{Ker}A = \{(z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$, donc A n'est pas inversible.
  - Si $a \neq -2$, alors $x = 0$, puis $y = z = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

Ainsi, A est inversible si et seulement si $a \notin \{-2, 1\}$.

8 Matrices inversibles . Pivot de Gauss

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse lorsqu'elle existe :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé

1.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Par le cours, A et inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow -L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right).$$

Donc, B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

La partie gauche ne peut pas être transformée en I_3 car elle a une ligne nulle. Par le cours, C n'est pas inversible.

4.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Donc, $D^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

5.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right).$$

Par voie de conséquence, E est inversible et $E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

6.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Deux lignes nulles ? F n'est pas inversible.

7.
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$
$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Une ligne nulle, donc G n'est pas inversible.

8.
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{9}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right)$$
$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right)$$
$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right).$$

Ainsi, H est inversible et $H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

9.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow -L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 11 & 7 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 6 & 13 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow -L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 11 & 7 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -6 & -13 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -6 & -13 \end{array}\right).$$

Par conséquent, I est inversible et $I^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -10 \\ -3 & -2 & -4 \\ -9 & -6 & -13 \end{pmatrix}$.

10.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow -L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow -L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

J est inversible et $J^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

9 Matrice anti-diagonale

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On introduit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \iddots & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels non nuls.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire le système $AX = Y$ puis le résoudre.
2. En déduire que A est inversible et calculer l'inverse de A.

Corrigé

1. Un calcul donne $AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_{n-1} \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} x_2 \\ \lambda_n x_1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $AX = Y$ donne le système $\begin{cases} \lambda_1 x_n = y_1 \\ \lambda_2 x_{n-1} = y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad .. \\ \lambda_{n-1} x_2 = y_{n-1} \\ \lambda_n x_1 = y_n \end{cases}$

Comme les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont non nuls, ce système est équivalent à $\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_n}{\lambda_n} \\ x_2 = \dfrac{y_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \\ \vdots \\ x_{n-1} = \dfrac{y_2}{\lambda_2} \\ x_n = \dfrac{y_1}{\lambda_1} \end{cases}$.

Donc, $S = \left\{ \left(\dfrac{y_n}{\lambda_n}, \dfrac{y_{n-1}}{\lambda_{n-1}}, \dots, \dfrac{y_1}{\lambda_1} \right) \right\}$.

2. Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ admet une unique solution. Ainsi, A est inversible et, d'après la question précédente, $A^{-1}Y = X$, ce qui donne

$$A^{-1}Y = \begin{pmatrix} \dfrac{y_n}{\lambda_n} \\ \dfrac{y_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \\ \vdots \\ \dfrac{y_2}{\lambda_2} \\ \dfrac{y_1}{\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{\lambda_n} \\ \vdots & \iddots & \dfrac{1}{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \dfrac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

10 Décomposition en éléments simples

1. Trouver $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que pour tout réel x différent de $-2, -1, 0$ et 1,

$$\frac{2x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{(x^2-1)(x^2+2x)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x-1}.$$

2. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{(x^2-1)(x^2+2x)}$ sur $]1, +\infty[$.

Corrigé

1. En réduisant le membre de droite au même dénominateur, on cherche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$2x^3 + 2x^2 + 6x + 4 = a(x+1)x(x-1) + b(x+2)x(x-1) + c(x+2)(x+1)(x-1) + d(x+2)(x+1)x.$$

En évaluant successivement cette égalité en -2, -1, 0 et 1, on obtient $\begin{cases} -16 = -6a \\ -2 = 2b \\ 4 = -2c \\ 14 = 6d \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{8}{3} \\ b = -1 \\ c = -2 \\ d = \dfrac{7}{3} \end{cases}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,0,1\}$, $\dfrac{2x^3+2x^2+6x+4}{(x^2-1)(x^2+2x)} = \dfrac{8}{3(x+2)} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{3(x-1)}$.

2. Sur $]1,+\infty[$, les réels $x+2$, $x+1$, x et $x-1$ sont strictement positifs. Une primitive cherchée est donc

$$F : x \longmapsto \frac{8}{3}\ln(x+2) - \ln(x+1) - 2\ln(x) + \frac{7}{3}\ln(x-1).$$

11 Décomposition en élément simple

On cherche, pour chaque question, à écrire la fraction proposée sous la forme d'une somme plus simple, puis à exploiter cette écriture pour calculer la somme partielle correspondante.

1. Trouver a et b tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$. En déduire la valeur de $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. Trouver a et b tels que $\dfrac{2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2}$. En déduire la valeur de $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.
3. Trouver a et b tels que $\dfrac{2}{n(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+2}$. En déduire la valeur de $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)}$.
4. Trouver a, b et c tels que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$. En déduire $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
5. Trouver a, b et c tels que $\dfrac{2}{(n-1)n(n+1)} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n+1}$. En déduire $S_N = \displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$.

Corrigé

N.B. : Puisqu'on parle d'égalité polynômiale vraie pour tout $n \geq n_0$ ($n_0 = 2$ dans la question 1, par exemple), elle est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ car deux polynômes égaux sur une infinité de points sont égaux.

1. En réduisant le membre de droite au même dénominateur, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $1 = a(n+1)+bn$.

   En évaluant successivement cette égalité en 0 et -1, on obtient $\begin{cases} 1 = a \\ 1 = -b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Par télescopage,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1}.$$

2. De même, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $2 = a(n+2) + b(n+1)$.

   En évaluant successivement cette égalité en -1 et -2, on obtient $\begin{cases} 2 = a \\ 2 = -b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{2}{n+2}$. Par télescopage,

$$S_N = 2\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 2 - \frac{2}{N+2} = \frac{2(N+1)}{N+2}.$$

3. De même, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $2 = a(n+2) + bn$.

   En évaluant successivement cette égalité en 0 et -2, on obtient $\begin{cases} 2 = 2a \\ 2 = -2b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{n(n+2)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}$, donc $\dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$. Par télescopage,

$$S_N = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) = \frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}.$$

4. En réduisant le membre de droite au même dénominateur, on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$1 = a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1).$$

   En évaluant successivement cette égalité en 0, -1 et -2, on obtient $\begin{cases} 1 = 2a \\ 1 = -b \\ 1 = 2c \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$.

   On remarque également que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$. Par télescopage,

$$S_N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\right) = \frac{N(N+3)}{4(N+1)(N+2)}.$$

5. De même, on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $2 = an(n+1) + b(n-1)(n+1) + c(n-1)n$.

   En évaluant successivement cette égalité en 1, 0 et -1, on obtient $\begin{cases} 2 = 2a \\ 2 = -b \\ 2 = 2c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$.

   Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{2}{(n-1)n(n+1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n+1}$.

   On remarque également que $\dfrac{2}{(n-1)n(n+1)} = \dfrac{1}{(n-1)n} - \dfrac{1}{n(n+1)}$. Par télescopage,

$$S_N = \frac{1}{6} - \frac{1}{N(N+1)} = \frac{(N-2)(N+3)}{6N(N+1)}.$$

12 Lemme d'Hadamard

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait : $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

On dit que A est une matrice à *diagonale strictement dominante*. Montrer que la matrice A est inversible.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant une matrice colonne X non nulle telle que $AX = 0$.

Corrigé

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur tel que $AX = 0$. On note i un indice tel que $|x_i| \geq |x_j|$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On a donc que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j = 0$. En particulier,

$$a_{i,i} x_i = -\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} a_{i,j} x_j \Rightarrow |a_{i,i}|\,|x_i| = \left| \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \leq |x_i| \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Donc, $|x_i| = 0$, sinon, il y a une contradiction avec le fait que A soit à diagonale dominante. Donc, le noyau de A est réduit à $\{0\}$, et A est inversible.

13 Un polynôme matriciel pour calculer un inverse

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Pour chacune de ces matrices, notée M, répondre aux questions suivantes.

1. Calculer M^2.
2. En déduire deux réels λ et μ tels que $M^2 + \lambda M + \mu I_2 = 0$.
3. En déduire que M est inversible, puis déterminer explicitement M^{-1}.

Corrigé

- **Pour la matrice A.**
  1. Un calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.
  2. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
  $$\begin{pmatrix} 3 + \lambda + \mu & 8 + 2\lambda \\ 4 + \lambda & 11 + 3\lambda + \mu \end{pmatrix} = 0.$$
  Le coefficient en bas à gauche donne $\lambda = -4$, puis celui en haut à gauche donne $\mu = 1$. Ces valeurs annulent bien les deux autres coefficients. Ainsi, $A^2 - 4A + I_2 = 0$.
  3. On en déduit $A(4I_2 - A) = I_2$. Par le cours, A est inversible et $A^{-1} = 4I_2 - A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Pour la matrice B.**
  1. Un calcul donne $B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.
  2. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
  $$\begin{pmatrix} 7 + \lambda + \mu & 10 + 2\lambda \\ 15 + 3\lambda & 22 + 4\lambda + \mu \end{pmatrix} = 0.$$
  Le coefficient en haut à droite donne $\lambda = -5$, puis celui en haut à gauche donne $\mu = -2$. Ces valeurs annulent bien les deux autres coefficients. Ainsi, $B^2 - 5B - 2I_2 = 0$.
  3. On en déduit $B\left(\frac{1}{2}(B - 5I_2)\right) = I_2$. Par le cours, B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{2}(B - 5I_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

14 Des polynômes matriciels en dimension trois

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2.
   (b) Déterminer deux réels λ et μ tels que $A^2 + \lambda A + \mu I_3 = 0$.
   (c) En déduire que A est inversible, puis déterminer explicitement A^{-1}.
2. (a) Calculer B^2 et B^3.
   (b) Déterminer trois réels λ, μ et ν tels que $B^3 + \lambda B^2 + \mu B + \nu I_3 = 0$.
   (c) En déduire que B est inversible, puis exprimer B^{-1} comme une combinaison linéaire de B^2, B et I_3.
   (d) Déterminer explicitement B^{-1}.

Corrigé

1. (a) Un calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (b) On remarque que $A^2 = A + 2I_3$. Ainsi, $A^2 - A - 2I_3 = 0$, et on prend $\lambda = -1$, $\mu = -2$.
   (c) On a $A\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3$. Ainsi, A est inversible et
   $$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. (a) Un calcul donne $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
   (b) En identifiant les coefficients de $B^3 + \lambda B^2 + \mu B + \nu I_3$, on obtient
   $$\begin{cases} 3 + \lambda = 0 \\ 3 + 2\lambda + \mu = 0 \\ 2 + \lambda + \mu + \nu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = 3 \\ \nu = -2. \end{cases}$$
   Ces valeurs annulent tous les coefficients. Ainsi, $B^3 - 3B^2 + 3B - 2I_3 = 0$.
   (c) On en déduit $B\left(\frac{1}{2}(B^2 - 3B + 3I_3)\right) = I_3$. Ainsi, B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{2}B^2 - \frac{3}{2}B + \frac{3}{2}I_3$.
   (d) En remplaçant B^2 et B par leurs expressions, on obtient $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15 Noyau et inversibilité

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $\ker A$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Justifier.
2. (a) Calculer $\ker B$.
   (b) La matrice B est-elle inversible ? Justifier.

Corrigé

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. (a) On a

$$X \in \mathrm{Ker}A \iff \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0. \end{cases}$$

   Ainsi, $\mathrm{Ker}A = \{0\}$.
   (b) Par le cours, A est inversible puisque son noyau est réduit à $\{0\}$.
2. (a) On a

$$X \in \mathrm{Ker}B \iff \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=-z. \end{cases}$$

   Ainsi, $\mathrm{Ker}B = \{(z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\}$.
   (b) Le vecteur $(1,-1,1)$ est non nul et appartient au noyau de B. Ainsi, B n'est pas inversible.

16 Des systèmes linéaires en dimension deux

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Résoudre le système $AX = 2X$.
   (b) Résoudre le système $AX = -X$.
2. (a) Résoudre le système $BX = 0$.
   (b) Résoudre le système $BX = 3X$.

Corrigé

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. (a) On a

$$AX = 2X \iff \begin{cases} x+y=2x \\ 2x=2y \end{cases} \iff y = x.$$

   Donc, $S = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(b) De même,

$$AX = -X \iff \begin{cases} x + y = -x \\ 2x = -y \end{cases} \iff y = -2x.$$

Donc, $S = \{(x, -2x) : x \in \mathbb{R}\}$.

2. (a) On a

$$BX = 0 \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \iff y = 2x.$$

Donc, $S = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(b) De même,

$$BX = 3X \iff \begin{cases} 4x - 2y = 3x \\ 2x - y = 3y \end{cases} \iff x = 2y.$$

Donc, $S = \{(2y, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

17 Des systèmes linéaires en dimension trois

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Résoudre le système $AX = X$.
   (b) Résoudre le système $AX = 4X$.
2. (a) Résoudre le système $BX = -2X$.
   (b) Résoudre le système $BX = X$.

Corrigé

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. (a) On a

$$AX = X \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\iff} \begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$$

Donc, $S = \{(z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(b) De même,

$$AX = 4X \iff \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \iff x = -y - z.$$

Donc, $S = \{(-y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

2. (a) On a

$$BX = -2X \iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\iff} \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}.$$

En remplaçant x par $2y+z$ dans les deux dernières équations, on obtient $-3y-3z=0$ et $3y+3z=0$. Ainsi, $y=-z$ et $x=-z$.

Donc, $S=\{(-z,-z,z) : z\in\mathbb{R}\}$.

(b) De même,

$$BX=X \iff \begin{cases} -x-y+z=0 \\ -x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \iff z=x+y.$$

Donc, $S=\{(x,y,x+y) : x,y\in\mathbb{R}\}$.

• • • • 18 Introduction aux valeurs propres

Dans cet exercice, on introduit une nouvelle notion : les valeurs propres d'une matrice.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in M_n(\mathbb{R})$.

On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX=\lambda X$.

Un tel vecteur X est appelé un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.

On notera $E_\lambda=\{X\in\mathbb{R}^n : AX=\lambda X\}$ le *sous-espace-propre* associé à λ.

Partie I - Recherche de valeurs propres

1. Montrer qu'un réel λ est une valeur propre de A si et seulement si le système $(A-\lambda I_n)X=0$ admet une solution non nulle.
2. Soient $A_1=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Pour chacune de ces matrices :
   (a) Déterminer toutes ses valeurs propres.
   (b) Pour chaque valeur propre, déterminer tous les vecteurs propres associés.

Partie II - Premières propriétés

Dans toute cette partie, $A\in M_n(\mathbb{R})$.

1. **Valeurs propres et inversibilité.**
   (a) Démontrer que $\ker A=E_0$
   (b) Montrer que A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A.
   (c) En déduire que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, λ est une valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Soient λ une valeur propre de A et $\alpha\in\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda+\alpha$ est une valeur propre de $A+\alpha I_n$.
3. Soit λ une valeur propre de A, et $\mu\in\mathbb{R}$. Montrer que $\mu\lambda$ est une valeur propre de μA.
4. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, λ^p est une valeur propre de A^p.
5. **Valeurs propres de l'inverse.**

   On suppose que A est inversible et on considère une valeur propre λ de A.
   (a) Montrer que $\lambda\neq 0$.
   (b) Montrer que $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}.

Partie III - Valeurs propres de matrices particulières

1. **Matrices diagonales.**

   Soit D une matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

   Montrer que les valeurs propres de D sont exactement les réels $d_1, \ldots, d_n$. On calculera à cet effet $D \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_1, ..., x_n$ quelconque.

   Notez que les valeurs propres d'une matrice diagonale sont les éléments de la diagonale, donc.

2. **Matrices triangulaires supérieures.**

   Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure : $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$.

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ distinct de tous les coefficients diagonaux de T. Montrer que $T - \lambda I_n$ est inversible. En déduire que λ n'est pas une valeur propre de T.

   (b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $T - t_{ii} I_n$ n'est pas inversible. En déduire que t_{ii} est une valeur propre de T.

   (c) En déduire que les valeurs propres de T sont exactement ses coefficients diagonaux.

3. **Matrices semblables.**

   Soient $A, D \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

   (a) Soit λ une valeur propre de D et X un vecteur propre associé.
   Montrer que PX est un vecteur propre de A associé à λ.

   (b) En utilisant l'égalité $D = P^{-1}AP$, montrer que A et D ont exactement les mêmes valeurs propres.

Partie IV - Pour aller plus loin

1. **Utilisation d'une relation polynomiale.**

   Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 - 3A + 2I_n = 0$.

   (a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
   Montrer que $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)X = 0$.

   (b) En déduire que les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 2.

   (c) Est-il nécessaire que 1 et 2 soient toutes les deux valeurs propres de A ? Justifier.

2. **Valeurs propres de AB et BA.**

   Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

   (a) Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de AB, et X un vecteur propre associé.
   Montrer que BX est non nul, puis que $BA(BX) = \lambda BX$.

   (b) En déduire que toute valeur propre non nulle de AB est une valeur propre de BA.

   (c) Montrer que AB et BA ont exactement les mêmes valeurs propres non nulles.

3. **Une matrice sans valeur propre réelle.**

   On considère la matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer R^2.

   (b) En supposant que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de R, montrer que $\lambda^2 = -1$.

   (c) En déduire que R n'admet aucune valeur propre réelle.

Corrigé

Partie I - Recherche de valeurs propres

1. Pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = \lambda X \iff AX - \lambda I_n X = 0 \iff (A - \lambda I_n)X = 0$. Ainsi, par définition, λ est une valeur propre de A si et seulement si ce dernier système admet une solution non nulle.

2. On cherche les réels λ pour lesquels $A_i X = \lambda X$ admet une solution non nulle.

   - **Pour la matrice A_1.** En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on obtient

   $$A_1 X = \lambda X \iff \begin{cases} (2-\lambda)x + y = 0 \\ (3-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

   Si $\lambda \notin \{2, 3\}$, la deuxième équation donne $y = 0$, puis la première donne $x = 0$. Il n'y a donc pas de solution non nulle.
   Si $\lambda = 2$, le système est équivalent à $y = 0$. Ainsi, $E_2 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.
   Si $\lambda = 3$, le système est équivalent à $y = x$. Ainsi, $E_3 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.
   Les valeurs propres de A_1 sont donc 2 et 3. Les vecteurs propres associés sont les vecteurs indiqués ci-dessus avec $x \neq 0$.

   - **Pour la matrice A_2.** En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on obtient

   $$A_2 X = \lambda X \iff \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ 2x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases} \quad \underset{\iff}{L_2 \leftarrow 2L_2 - (1-\lambda)L_1} \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ (4 - (1-\lambda)^2)x = 0. \end{cases}$$

   Or, $4 - (1-\lambda)^2 = (3-\lambda)(1+\lambda)$. Si $\lambda \notin \{-1, 3\}$, alors $x = 0$ puis $y = 0$.
   Si $\lambda = -1$, le système est équivalent à $y = -x$. Ainsi, $E_{-1} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.
   Si $\lambda = 3$, le système est équivalent à $y = x$. Ainsi, $E_3 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.
   Les valeurs propres de A_2 sont donc -1 et 3. Les vecteurs propres associés sont les vecteurs indiqués ci-dessus avec $x \neq 0$.

   - **Pour la matrice A_3.** En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on obtient

   $$A_3 X = \lambda X \iff \begin{cases} (1-\lambda)x + z = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \\ x + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \quad \underset{\iff}{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1} \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + z = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \\ \lambda(2-\lambda)x = 0. \end{cases}$$

   Si $\lambda \notin \{0, 2\}$, on obtient $x = y = z = 0$.
   Si $\lambda = 0$, le système est équivalent à $y = 0$ et $z = -x$. Ainsi, $E_0 = \{(x, 0, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.
   Si $\lambda = 2$, le système est équivalent à $z = x$, sans condition sur y. Ainsi, $E_2 = \{(x, y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
   Les valeurs propres de A_3 sont donc 0 et 2. Les vecteurs propres associés à 0 correspondent à $x \neq 0$; ceux associés à 2 correspondent à $(x, y) \neq (0, 0)$.

Partie II - Premières propriétés

1. (a) Par définition, $E_0 = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0X\} = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\} = \mathrm{Ker}A$.

   (b) Par le cours, A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}A = \{0\}$. D'après la question précédente, cela équivaut à $E_0 = \{0\}$, c'est-à-dire à l'absence de vecteur non nul vérifiant $AX = 0X$. Ainsi, A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A.

   (c) D'après la partie I,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } A &\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible.} \end{aligned}$$

2. Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Alors, $(A + \alpha I_n)X = AX + \alpha X = (\lambda + \alpha)X$. Comme $X \neq 0$, $\lambda + \alpha$ est une valeur propre de $A + \alpha I_n$.

3. Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Alors, $(\mu A)X = \mu(AX) = \mu\lambda X$. Comme $X \neq 0$, $\mu\lambda$ est une valeur propre de μA (y compris lorsque $\mu = 0$!).

4. Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $P(p) : A^pX = \lambda^p X$.

   - **Initialisation.** $AX = \lambda X$ par choix de X.
   - **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(p)$ soit vraie. Alors, $A^{p+1}X = A(A^pX) = A(\lambda^p X) = \lambda^p AX = \lambda^{p+1}X$. Ainsi, $P(p+1)$ est vraie.

5. (a) Puisque A est inversible, 0 n'est pas une valeur propre de A. Ainsi, $\lambda \neq 0$.

   (b) Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. En multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $X = \lambda A^{-1}X$, donc $A^{-1}X = \dfrac{1}{\lambda}X$. Comme $X \neq 0$, $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}.

Partie III - Valeurs propres de matrices particulières

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $DX = \begin{pmatrix} d_1x_1 \\ \vdots \\ d_nx_n \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$DX = \lambda X \iff \begin{cases} (d_1 - \lambda)x_1 = 0 \\ \vdots \\ (d_n - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

   Si λ est distinct de tous les d_i, chaque équation impose $x_i = 0$. Ainsi, λ n'est pas une valeur propre.

   Réciproquement, soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note e_i le vecteur dont la i-ème coordonnée vaut 1 et dont les autres coordonnées sont nulles. Alors, $De_i = d_ie_i$ et $e_i \neq 0$. Ainsi, d_i est une valeur propre de D. Les valeurs propres de D sont donc exactement les réels $d_1, \ldots, d_n$.

2. (a) La matrice $T - \lambda I_n$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Elle est donc inversible par le cours. D'après la partie II, λ n'est pas une valeur propre de T.

   (b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La matrice $T - t_{ii}I_n$ est triangulaire supérieure avec un coefficient diagonal nul : elle n'est donc pas inversible. Par la partie II, on a donc t_{ii} qui est valeur propre de T.

   (c) La question a. montre qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres que les coefficients diagonaux, et la question b. montre que chaque coefficient diagonal est une valeur propre. Les valeurs propres de T sont donc exactement ses coefficients diagonaux.

3. (a) Puisque P est inversible et $X \neq 0$, on a $PX \neq 0$. En effet, le seul élément du noyau de P est 0. De plus,

$$A(PX) = PDP^{-1}PX = PDX = P(\lambda X) = \lambda PX.$$

   Ainsi, PX est un vecteur propre de A associé à λ.

(b) La question précédente montre que toute valeur propre de D est une valeur propre de A. Réciproquement, si $AY = \lambda Y$ avec $Y \neq 0$, alors $P^{-1}Y \neq 0$ et

$$D(P^{-1}Y) = P^{-1}APP^{-1}Y = P^{-1}AY = \lambda P^{-1}Y.$$

Ainsi, toute valeur propre de A est une valeur propre de D. Les deux matrices ont donc exactement les mêmes valeurs propres.

Partie IV - Pour aller plus loin

1. (a) On a $AX = \lambda X$, donc $A^2X = \lambda^2 X$. Ainsi,

$$0 = (A^2 - 3A + 2I_n)X = \lambda^2 X - 3\lambda X + 2X = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)X.$$

(b) Puisque $X \neq 0$, on en déduit $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, soit $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$. Ainsi, $\lambda \in \{1, 2\}$.

(c) Non. Par exemple, $A = I_n$ vérifie $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, mais sa seule valeur propre est 1. De même, $A = 2I_n$ vérifie cette relation et sa seule valeur propre est 2.

2. (a) On a $ABX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ et $\lambda \neq 0$. Si $BX = 0$, alors $ABX = 0$, donc $\lambda X = 0$, ce qui est impossible. Ainsi, $BX \neq 0$. De plus,

$$BA(BX) = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda BX.$$

(b) Le vecteur BX est donc un vecteur propre de BA associé à λ. Ainsi, toute valeur propre non nulle de AB est une valeur propre de BA.

(c) En échangeant les rôles de A et de B, toute valeur propre non nulle de BA est une valeur propre de AB. Les deux matrices ont donc exactement les mêmes valeurs propres non nulles.

3. (a) Un calcul donne $R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.

(b) Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}$ soit une valeur propre de R. Il existe $X \neq 0$ tel que $RX = \lambda X$. Alors, $R^2X = \lambda^2 X$, mais aussi $R^2X = -X$. Ainsi, $(\lambda^2 + 1)X = 0$, et comme $X \neq 0$, on obtient $\lambda^2 = -1$.

(c) Le carré d'un réel étant positif ou nul, cette égalité est impossible. Ainsi, R n'admet aucune valeur propre réelle.