Quelques précisions :

— La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,

— toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,

— les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

" Peut-être que je pourrais mieux décrire mon expérience de faire des mathématiques en termes d'entrée dans un manoir sombre. Vous entrez dans la première pièce et il fait sombre, complètement sombre. Vous trébuchez et vous heurtez aux meubles. Petit à petit, vous apprenez où se trouve chaque meuble. Et finalement, après environ six mois, vous trouvez l'interrupteur et l'allumez. Soudain, tout est illuminé et vous pouvez voir exactement où vous étiez. Ensuite, vous entrez dans la prochaine pièce sombre. . . "
Andrew Wiles

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

— justifier les étapes de calculs,

— justifier la dérivabilité d'une fonction,

— justifier les manipulations sur les inégalités,

— vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,

— citer les théorèmes utilisés,

— annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	**-1 par occurrence**
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	**-1 par occurrence**
récurrence mal rédigée	**jusqu'à -2 par occurrence**
non sens	**jusqu'à -2 par occurrence**
absence ou erreur de numérotation des questions	**-1 par occurrence**
résultats non soulignés / encadrés	**jusqu'à -3 sur la copie**
présentation / erreur de pagination	**jusqu'à -3 sur la copie**
écriture insuffisamment soignée	**jusqu'à -5 sur la copie**

Sommes et produits

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}$
2. Calculer
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3k}$$
3. Développer $(x+3)^{2n+1}$ avec la formule du binôme
4. On suppose $n \geq 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n} (-x)^k$ pour $x \neq -1$.
5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} 1$.

Corrigé

Corrigé

1. Il s'agit d'une somme télescopique. On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\ \text{Changement de variable : } l = k+2\,;\, j = k+1 \quad &= \sum_{l=3}^{n+2}\frac{1}{l} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} + \sum_{l=3}^{n+1}\frac{1}{l} - \sum_{j=3}^{n+1}\frac{1}{j} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
2. On a
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{3k} = \frac{1}{3^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{3^n}\frac{\prod_{k=1}^{n} k+1}{\prod_{k=1}^{n} k} \underset{l=k+1}{=} \frac{1}{3^n}\frac{\prod_{l=2}^{n+1} l}{\prod_{k=1}^{n} k} = \quad = \frac{n+1}{3^n}.$$
3. D'après la formule du binôme de Newton, $(x+3)^{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} x^k 3^{2n+1-k}$.
4. On reconnaît une somme géométrique de raison $-x \neq 1$. Ainsi, (puisque $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ puisque l'exposant est impair),
$$\sum_{k=2}^{2n}(-x)^k = \frac{(-x)^2 - (-x)^{2n+1}}{1-(-x)} = \frac{x^2 + x^{2n+1}}{1+x}.$$
5. On a
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} 1 = \sum_{k=0}^{n}(k+1) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Deux dérivées

1. Dériver la fonction $x \to \arctan(1/x)$
2. On pose, pour $x > 0$, la fonction $f : x \to \arctan(x) + \arctan(1/x)$. Quelle est sa limite en $+\infty$? Que vaut $f(1)$?
3. Calculer $f'(x)$.
4. Que peut on en déduire pour f ?
5. Dériver $g : x \to x^x$ définie pour $x > 0$.

Corrigé

1. La fonction $x \mapsto \arctan(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composée et, pour tout $x \neq 0$, $\arctan'(u) = \dfrac{u'}{1+u^2}$.
   On a donc
   $$\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{1+x^2}.$$
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
   Par continuité de arctan en 0, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \arctan(0) = \dfrac{\pi}{2}$.
   De plus, $f(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et, pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$.
4. Puisque f' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est constante sur cet intervalle. Or $f(1) = \frac{\pi}{2}$. Donc
   $$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$$
5. Pour tout $x > 0$, on a $g(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$.
   La fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée et, pour tout $x > 0$, puisque $(e^u)' = u'e^u$,
   $$g'(x) = (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}.$$

Une puissance de matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. (prenez votre temps !)
2. Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 = \lambda A + \mu I_2$. *Il faudra résoudre un système*[1]
3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n, v_n \in \mathbb{R}, A^n = u_n A + v_n I_2$.
4. Calculer u_0, v_0, u_1, v_1.
5. Trouver une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n et v_n. De même pour v_{n+1} et v_n et u_n. (normalement, vous avez $u_{n+1} = -4u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -4u_n$, et ça découle de votre preuve de la question 3.)
6. En utilisant la relation ci-dessus, trouver une relation entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n. (normalement, vous avez $u_{n+2} = -4u_{n+1} - 4u_n$)
7. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
8. En déduire l'expression de v_n en fonction de n. (on trouve $(1-n)(-2)^n$)
9. En déduire A^n. (on devrait trouver $A^n = (-2)^n \begin{pmatrix} 1+\frac{3n}{2} & -\frac{9n}{2} \\ \frac{n}{2} & 1-\frac{n}{2} \end{pmatrix}$.)
10. On définit les suites (a_n) et (b_n) ainsi :
    — $a_0 = 2$, $b_0 = 1$.
    — $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = -5a_n + 9b_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n \end{cases}$

    (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
    (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
    (c) En utilisant la question précédente, en déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n. (On devrait trouver $a_n = (-2)^n\left(2 - \dfrac{3n}{2}\right)$ et $b_n = (-2)^n\left(1 + \dfrac{n}{2}\right)$.)

1. Si vous ne trouvez pas : $\lambda = -4$ et $\mu = -4$

Corrigé

1. On trouve $\begin{pmatrix} 16 & -36 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$.
2. Cherchons $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_2$.
   On a
   $$A^2 = \lambda A + \mu I_2 \iff \begin{pmatrix} 16 & -36 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\lambda + \mu & 9\lambda \\ -\lambda & \lambda + \mu \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -5\lambda + \mu = 16 \\ 9\lambda = -36 \\ -\lambda = 4 \\ \lambda + \mu = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -4 \\ \mu = -4. \end{cases}$$
   Ainsi, $A^2 = -4A - 4I_2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = u_n A + v_n I_2$.
   — **Initialisation.** On a $A^0 = I_2 = 0A + 1I_2$, donc $P(0)$ est vraie.
   — **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Il existe donc $u_n, v_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = u_n A + v_n I_2$.
   Alors
   $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = (u_n A + v_n I_2)A \\ &= u_n A^2 + v_n A \\ &= u_n(-4A - 4I_2) + v_n A \\ &= (-4u_n + v_n)A - 4u_n I_2. \end{aligned}$$
   En posant $u_{n+1} = -4u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -4u_n$, on a bien $A^{n+1} = u_{n+1}A + v_{n+1}I_2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
4. On a $A^0 = I_2 = 0A + 1I_2$ et $A^1 = A = 1A + 0I_2$. Donc, $u_0 = 0, v_0 = 1, u_1 = 1, v_1 = 0$.
5. D'après l'hérédité de la question 3, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + v_n \\ v_{n+1} = -4u_n. \end{cases}$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$u_{n+2} = -4u_{n+1} + v_{n+1} = -4u_{n+1} - 4u_n.$$
7. La suite (u_n) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique
   $$r^2 + 4r + 4 = 0 \iff (r+2)^2 = 0.$$
   L'unique racine est $r = -2$. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + \beta n)(-2)^n$. Il vient
   $$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ -2(\alpha + \beta) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\dfrac{n}{2}(-2)^n$.
8. D'après la question 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -4u_n + v_n$. Ainsi,
   $$v_n = u_{n+1} + 4u_n = -\frac{n+1}{2}(-2)^{n+1} - 2n(-2)^n = (n+1)(-2)^n - 2n(-2)^n = (1-n)(-2)^n.$$
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{aligned} A^n &= u_n A + v_n I_2 \\ &= -\frac{n}{2}(-2)^n A + (1-n)(-2)^n I_2 \\ &= (-2)^n \left(-\frac{n}{2} A + (1-n) I_2 \right) \\ &= (-2)^n \left[-\frac{n}{2} \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= (-2)^n \begin{pmatrix} 1 + \frac{3n}{2} & -\frac{9n}{2} \\ \frac{n}{2} & 1 - \frac{3n}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$AX_n = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a_n + 9b_n \\ -a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : X_n = A^n X_0$.

— **Initialisation.** On a $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$, donc $P(0)$ est vraie.
— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. D'après la question précédente, $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

(c) D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0 = (-2)^n \begin{pmatrix} 1 + \frac{3n}{2} & -\frac{9n}{2} \\ \frac{n}{2} & 1 - \frac{3n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2)^n \begin{pmatrix} 2 + 3n - \frac{9n}{2} \\ n + 1 - \frac{3n}{2} \end{pmatrix} = (-2)^n \begin{pmatrix} 2 - \frac{3n}{2} \\ 1 - \frac{n}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par identification des coefficients, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-2)^n \left(2 - \dfrac{3n}{2}\right)$ et $b_n = (-2)^n \left(1 - \dfrac{n}{2}\right)$.