Corrigé du DS de calcul – Niveau 2

Exercice 1 – Sommes et produits

1. Pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2} &= \frac{a(k+1)(k+2)+bk(k+2)+ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{(a+b+c)k^2+(3a+2b+c)k+2a}{k(k+1)(k+2)}.\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir a, b, c tels que $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Ainsi, pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{2(k+2)}$.

2. On utilise la décomposition précédente, puis on effectue les changements d'indice $j = k+1$ dans la deuxième somme et $j = k+2$ dans la troisième :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

3. Pour tout $n \geq 2$, par télescopage,

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

4. Pour tout $n \geq 2$, d'après la formule du binôme,

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} - 1 + n = (1-1)^n - 1 + n = n-1.$$

5. Pour tout $n \geq 2$, on reconnaît une somme géométrique de raison $-6 \neq 1$:

$$\sum_{k=2}^{n}2^k(-3)^k = \sum_{k=2}^{n}(-6)^k = \frac{(-6)^2-(-6)^{n+1}}{1-(-6)} = \frac{36-(-6)^{n+1}}{7}$$

Exercice 2 – Dérivation et étude de fonctions

1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(x)$ est défini si et seulement si $1-x^2 \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

2. Aux infinis, $\dfrac{2x}{1-x^2} \longrightarrow 0$ (factoriser par x^2 au dénominateur si besoin). Par continuité de arctan en 0,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Aux autres bornes, on obtient

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty.$$

Comme $\lim_{t\to\pm\infty} \arctan(t) = \pm\frac{\pi}{2}$, on en déduit

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

3. La fonction f est dérivable sur D_f par composition de fonctions dérivables. Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{2(1+x^2)}{1-2x^2+x^4+4x^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

4. On constate donc que, sur chacun des intervalles constituant D_f, $f = 2\arctan(x) + C$, avec C dépendant de l'intervalle que l'on notera $C_{]-1,1[}$, $C_{]-\infty,-1[}$ ou $C_{]1,+\infty[}$ selon l'endroit où l'on se trouve.
Sur $]-1,1[$, $0 = f(0) = C_{]-1,1[}$, donc $f(x) = 2\arctan(x)$.
Sur $]-\infty,-1[$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. De plus, $\lim_{x\to-\infty} 2\arctan(x) + C_{]-\infty,-1[} = C_{]-\infty,-1[} - \pi$, donc $C_{]-\infty,-1[} - \pi = 0$ et $C_{]-\infty,-1[} = \pi$. Donc $f(x) = 2\arctan(x) + \pi$.
Sur $]1,+\infty[$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} 2\arctan(x) + C_{]1,+\infty[} = C_{]1,+\infty[} + \pi$. Donc, $C_{]1,+\infty[} = -\pi$.
Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} 2\arctan(x) + \pi & \text{si } x < -1, \\ 2\arctan(x) & \text{si } -1 < x < 1, \\ 2\arctan(x) - \pi & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

5. Comme $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et arctan est injective, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \iff \frac{2x}{1-x^2} = 1 \iff x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1-\sqrt{2} \text{ ou } x = -1+\sqrt{2}.$$

Seul $\sqrt{2}-1$ appartient à $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La seule solution est $\sqrt{2}-1$.

Exercice 3 – Une puissance de matrice

1. On calcule

$$N = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier $p \geq 3$, $N^p = N^3 N^{p-3} = 0$.

2. Les matrices $2I_3$ et N commutent. Pour tout entier $n \geq 2$, la formule du binôme donne

$$\begin{aligned} A^n &= (2I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} N^k \\ &= 2^n I_3 + n2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2 + 0 \\ &= 2^n \begin{pmatrix} 1 + \frac{n}{2} - \frac{n(n-1)}{8} & -\frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{8} & \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} - \frac{n(n-1)}{8} & 1 - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{8} & \frac{n}{2} \\ -\frac{n}{2} & \frac{n}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, cette dernière expression donne respectivement I_3 et A. La formule est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 – Suite récurrente

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le discriminant de x^2+x+1 vaut $-3<0$. Ainsi, ce polynôme est strictement positif (donc non nul), et $D_f = \mathbb{R}$.

   (b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f'(x) = \frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}.$$

   Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ est du signe de $1-x^2$. De plus, $f(-1)=-1$, $f(1)=\frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0

2. (a) Pour tout entier $p \geq 1$, $p^2+p+1 \geq p^2+p > 0$. Ainsi,

   $$f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p}{p^2+p+1} \leq \frac{p}{p^2+p} = \frac{1}{p+1}.$$

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   Initialisation. $u_0 = 1$, donc $0 < u_0 \leq \dfrac{1}{0+1}$.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. tel que $P(n)$. On a donc $0 < u_n \leq 1/(n+1)$. Les réels u_n et $\dfrac{1}{n+1}$ appartiennent à $[0,1]$, intervalle sur lequel f est strictement croissante. D'après la question précédente, appliquée à $p = n+1$,

   $$0 = f(0) < f(u_n) = u_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}.$$

   (c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, donc tout est bien défini, et

   $$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2+u_n+1}{u_n} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}.$$

   (e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P(n) : \dfrac{1}{u_n} \leq n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

   Initialisation. $u_1 = f(1) = \dfrac{1}{3}$, donc $\dfrac{1}{u_1} = 3 = 1+1+\sum\limits_{k=1}^{1}\dfrac{1}{k}$.

   Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $P(n)$. D'après les questions précédentes,

   $$\frac{1}{u_{n+1}} \quad = \quad u_n + 1 + \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{n+1} + 1 + n + 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = n+2+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

   (f) i. On pose $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$. La fonction g est dérivable et, pour tout $x > -1$, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$. Ainsi, g est décroissante sur $]-1,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Elle atteint donc son minimum en 0. Comme $g(0)=0$, on obtient $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$.

ii. Pour tout $k \geq 2$, $-\dfrac{1}{k} \in]-1, +\infty[$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = -\dfrac{1}{k}$, on obtient

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \leq -\frac{1}{k} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(k-1) - \ln k \leq -\frac{1}{k} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1).$$

iii. En sommant les inégalités précédentes, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \big(\ln k - \ln(k-1)\big) = \ln n - \ln 1 = \ln n.$$

(g) Pour tout $n \geq 2$, d'après les questions précédentes,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n + 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq n + 2 + \ln n.$$

(h) Pour tout $n \geq 2$, les termes étant strictement positifs, la dernière inégalité donne $u_n \geq \dfrac{1}{n + 2 + \ln n}$. Avec la majoration obtenue en 2.(b), il vient

$$\frac{1}{n+2+\ln n} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}, \qquad \text{puis} \qquad \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{\ln n}{n}} \leq n u_n \leq \frac{n}{n+1}.$$

Par croissances comparées, $\dfrac{\ln n}{n} \longrightarrow 0$. Les deux bornes tendent donc vers 1. Par le théorème des gendarmes, la suite (nu_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 1$.