# Corrigé – Minimum et maximum

## 1 Premières propriétés du max et du min

1. On a $\min(I) = -3$, $\max(I) = 7$, $\min(J) = -5$ et $\max(J) = 0$.

2. Comme $\max(I) \in I$ et $I \subset J$, on a $\max(I) \in J$. Par définition du maximum de $J$, $\max(I) \leq \max(J)$. De même, $\min(I) \in J$, donc $\min(J) \leq \min(I)$.

3. On pose $M = \max\big(\max(I), \max(J)\big)$. Pour tout $x \in I \cup J$, on a $x \in I$ ou $x \in J$. Dans le premier cas, $x \leq \max(I) \leq M$ ; dans le second, $x \leq \max(J) \leq M$. Ainsi, pour tout $x \in I \cup J$, $x \leq M$. De plus, $M$ est égal à $\max(I)$ ou à $\max(J)$, donc $M \in I \cup J$. Par définition du maximum, $\max(I \cup J) = \max\big(\max(I), \max(J)\big)$.

   De même, $\min(I \cup J) = \min\big(\min(I), \min(J)\big)$. En effet, en posant $m = \min\big(\min(I), \min(J)\big)$, tout $x \in I \cup J$ vérifie $x \geq \min(I) \geq m$ ou $x \geq \min(J) \geq m$. De plus, $m$ est l'un des deux minima, donc $m \in I \cup J$. Il s'agit bien du minimum de $I \cup J$.

4. Soit $y \in I + a$. Il existe $x \in I$ tel que $y = x + a$. Comme $x \leq \max(I)$, on a $y \leq \max(I) + a$. De plus, $\max(I) \in I$, donc $\max(I) + a \in I + a$. Ainsi, $\max(I + a) = \max(I) + a$.

   Pour le minimum, on a $\min(I + a) = \min(I) + a$. En effet, tout $y \in I + a$ s'écrit $y = x + a$, avec $x \in I$, donc $y \geq \min(I) + a$. Comme $\min(I) + a \in I + a$, il s'agit bien du minimum de $I + a$.

5. a) On suppose $\lambda \geq 0$. Soit $y \in \lambda I$. Il existe $x \in I$ tel que $y = \lambda x$. Comme $x \leq \max(I)$ et $\lambda \geq 0$, on a $y \leq \lambda \max(I)$. De plus, $\lambda \max(I) \in \lambda I$. Donc, $\max(\lambda I) = \lambda \max(I)$.

      Si $\lambda = 0$, on a bien $0 = 0$.

   b) On prend $I = \{1, 2\}$ et $\lambda = -1$. Alors $\lambda I = \{-2, -1\}$, donc $\max(\lambda I) = -1$, tandis que $\lambda \max(I) = -2$. La formule précédente est donc fausse dans ce cas.

   c) Si $\lambda < 0$, la formule correcte est $\max(\lambda I) = \lambda \min(I)$. En effet, pour tout $x \in I$, $x \geq \min(I)$. Comme $\lambda < 0$, on obtient $\lambda x \leq \lambda \min(I)$. Ainsi, tout élément de $\lambda I$ est inférieur ou égal à $\lambda \min(I)$. Comme $\lambda \min(I) \in \lambda I$, il s'agit bien du maximum de $\lambda I$.

## 2 Premier exemple

1. Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, on a $u_k \leq M(u)$ et $v_k \leq M(v)$, donc $u_k + v_k \leq M(u) + M(v)$. C'est vrai pour tout $k$, donc $\max\limits_{1 \leq k \leq N}(u_k + v_k) \leq M(u) + M(v)$.

2. Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, $u_k \geq m(u)$ et $v_k \geq m(v)$, donc $u_k + v_k \geq m(u) + m(v)$. En prenant un indice où la somme est minimale, on obtient $\min\limits_{1 \leq k \leq N}(u_k + v_k) \geq m(u) + m(v)$.

3. Par définition de $M(u)$, il existe $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ tel que $u_{k_0} = M(u)$. Comme $v_{k_0} \geq m(v)$,

$$M(u) + m(v) \leq u_{k_0} + v_{k_0} \leq \max_{1 \leq k \leq N}(u_k + v_k).$$

   En utilisant la question 1 pour l'autre inégalité, on obtient $M(u) + m(v) \leq \max\limits_{1 \leq k \leq N}(u_k + v_k) \leq M(u) + M(v)$.

4. On prend $N = 2$, $(u_1, u_2) = (1, 0)$ et $(v_1, v_2) = (0, 1)$. Alors $M(u) = M(v) = 1$, tandis que $u_1 + v_1 = u_2 + v_2 = 1$. Donc, $\max\limits_{1 \leq k \leq 2}(u_k + v_k) = 1 < 2 = M(u) + M(v)$.

5. Raisonnons par double implication.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons qu'il existe $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ tel que $u_{k_0} = M(u)$ et $v_{k_0} = M(v)$. Alors, $\max\limits_{1 \leq k \leq N}(u_k + v_k) \geq u_{k_0} + v_{k_0} = M(u) + M(v)$. L'inégalité inverse étant vraie d'après la question 1, on a égalité.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que $\max\limits_{1 \leq k \leq N}(u_k + v_k) = M(u) + M(v)$. Il existe donc $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ tel que $u_{k_0} + v_{k_0} = M(u) + M(v)$. Ainsi,

$$\underbrace{M(u) - u_{k_0}}_{\geq 0} + \underbrace{M(v) - v_{k_0}}_{\geq 0} = 0.$$

Une somme de deux réels positifs ou nuls est nulle seulement si les deux termes sont nuls. Donc, $u_{k_0} = M(u)$ et $v_{k_0} = M(v)$.

## 3 Propriétés plus avancées

1. On pose $m = \min(I)$ et $M = \max(I)$. Pour tout $x \in I$, $m \leq x \leq M$, donc $x \leq M$ et $-x \leq -m$. Ainsi, $|x| = \max(x, -x) \leq \max(-m, M)$. On en déduit $\max(|I|) \leq \max(-m, M)$.

   D'autre part, $m, M \in I$, donc $|m|, |M| \in |I|$. Par définition du maximum, $\max(|I|) \geq |m| \geq -m$ et $\max(|I|) \geq |M| \geq M$. Ainsi, $\max(|I|) \geq \max(-m, M)$. Par double inégalité, $\max(|I|) = \max\big(-\min(I), \max(I)\big)$.

2. Soit $z \in I + J$. Il existe $x \in I$ et $y \in J$ tels que $z = x + y$. Comme $x \leq \max(I)$ et $y \leq \max(J)$, on a $z \leq \max(I) + \max(J)$. De plus, $\max(I) \in I$ et $\max(J) \in J$, donc $\max(I) + \max(J) \in I + J$. Ainsi, $\max(I + J) = \max(I) + \max(J)$.

   De même, $\min(I + J) = \min(I) + \min(J)$. En effet, pour tous $x \in I$ et $y \in J$, $x + y \geq \min(I) + \min(J)$, et cette valeur appartient à $I + J$.

3. Soit $z \in |I + J|$. Il existe $x \in I$ et $y \in J$ tels que $z = |x + y|$. Par l'inégalité triangulaire,

$$z = |x + y| \leq |x| + |y| \leq \max(|I|) + \max(|J|).$$

   Cette inégalité est vraie pour tout élément de $|I+J|$, donc en particulier pour son maximum. Ainsi, $\max(|I+J|) \leq \max(|I|) + \max(|J|)$.

4. Pour une inégalité stricte, on prend $I = \{1\}$ et $J = \{-1\}$. Alors $I + J = \{0\}$, donc $\max(|I + J|) = 0 < 2 = \max(|I|) + \max(|J|)$.

   Pour une égalité, on prend $I = \{1\}$ et $J = \{2\}$. Alors $I + J = \{3\}$, donc $\max(|I + J|) = 3 = 1 + 2 = \max(|I|) + \max(|J|)$.

5. Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, par l'inégalité triangulaire,

$$|u_k + v_k| \leq |u_k| + |v_k| \leq \max_{1 \leq j \leq N} |u_j| + \max_{1 \leq j \leq N} |v_j|.$$

   En prenant un indice où $|u_k + v_k|$ est maximal, on obtient $\max_{1 \leq k \leq N} |u_k + v_k| \leq \max_{1 \leq k \leq N} |u_k| + \max_{1 \leq k \leq N} |v_k|$.

6. Pour tous $x \in I$ et $y \in J$, on a $0 \leq |x| \leq \max(|I|)$ et $0 \leq |y| \leq \max(|J|)$. On peut donc multiplier ces inégalités, ce qui donne $|xy| = |x||y| \leq \max(|I|) \max(|J|)$. Ainsi, tout élément de $|IJ|$ est inférieur ou égal à $\max(|I|) \max(|J|)$.

   De plus, il existe $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$ tels que $|x_0| = \max(|I|)$ et $|y_0| = \max(|J|)$. Alors

$$|x_0 y_0| = |x_0||y_0| = \max(|I|) \max(|J|),$$

   donc cette valeur appartient à $|IJ|$. Par définition du maximum, $\max(|IJ|) = \max(|I|) \max(|J|)$.

## 4 Pour aller encore plus loin

1. Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, $u_k - v_k \leq |u_k - v_k|$, donc $u_k = v_k + (u_k - v_k) \leq v_k + |u_k - v_k|$.

2. Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, d'après la question précédente,

$$u_k \leq v_k + |u_k - v_k| \leq \max_{1 \leq j \leq N} v_j + \max_{1 \leq j \leq N} |u_j - v_j|.$$

   En prenant un indice où $u_k$ est maximal, on obtient $\max_{1 \leq k \leq N} u_k \leq \max_{1 \leq k \leq N} v_k + \max_{1 \leq k \leq N} |u_k - v_k|$.

3. On pose $\delta = \max_{1 \leq k \leq N} |u_k - v_k|$. D'après la question précédente, $\max_{1 \leq k \leq N} u_k - \max_{1 \leq k \leq N} v_k \leq \delta$. En échangeant les rôles de $u$ et de $v$, et puisque $|v_k - u_k| = |u_k - v_k|$, on obtient aussi $\max_{1 \leq k \leq N} v_k - \max_{1 \leq k \leq N} u_k \leq \delta$. Ainsi,

$$-\delta \leq \max_{1 \leq k \leq N} u_k - \max_{1 \leq k \leq N} v_k \leq \delta, \qquad \text{donc} \qquad \left| \max_{1 \leq k \leq N} u_k - \max_{1 \leq k \leq N} v_k \right| \leq \max_{1 \leq k \leq N} |u_k - v_k|.$$

4. L'inégalité analogue est $\left|\min_{1\leq k\leq N} u_k - \min_{1\leq k\leq N} v_k\right| \leq \max_{1\leq k\leq N} |u_k - v_k|$.

   La grande idée est de se dire que le minimum de $u$ vaut l'opposée du maximum de (-u) : $m(u) = -M(-u)$.

   En effet, d'après la première partie appliquée à $\lambda = -1$, $\max_{1\leq k\leq N}(-u_k) = -\min_{1\leq k\leq N} u_k$ et $\max_{1\leq k\leq N}(-v_k) = -\min_{1\leq k\leq N} v_k$.

   On applique donc la question précédente aux familles $(-u_1, \ldots, -u_N)$ et $(-v_1, \ldots, -v_N)$ :

$$\begin{aligned}\left|\min_{1\leq k\leq N} u_k - \min_{1\leq k\leq N} v_k\right| &= \left|\max_{1\leq k\leq N}(-u_k) - \max_{1\leq k\leq N}(-v_k)\right| \\ &\leq \max_{1\leq k\leq N} |-u_k + v_k| = \max_{1\leq k\leq N} |u_k - v_k|.\end{aligned}$$