1 Premières propriétés du max et du min

Soit I un ensemble fini non vide de réels. On appelle **maximum** de I le réel M qui vérifie :

- $M \in I$;
- pour tout $x \in I$, $x \leq M$.

On le note $\max(I)$. De même, on appelle **minimum** de I le réel m qui vérifie :

- $m \in I$;
- pour tout $x \in I$, $m \leq x$.

On le note $\min(I)$. On admet que tout ensemble fini non vide de réels possède un minimum et un maximum.

1. Déterminer le minimum et le maximum de $I = \{-3, 1, 4, 7\}$ et de $J = \{-5, -2, 0\}$.
2. Soient I et J deux ensembles finis non vides tels que $I \subset J$. Comparer $\max(I)$ et $\max(J)$, puis $\min(I)$ et $\min(J)$.
3. Démontrer que, pour tous ensembles finis non vides I et J, $\max(I \cup J) = \max\big(\max(I), \max(J)\big)$.
   Énoncer et démontrer une propriété analogue pour le minimum.
4. Soient $a \in \mathbb{R}$ et I un ensemble fini non vide. On rappelle que $I + a = \{x + a \mid x \in I\}$.
   Démontrer que $\max(I + a) = \max(I) + a$. Donner une formule analogue pour le minimum et la démontrer.
5. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et I un ensemble fini non vide. On rappelle que $\lambda I = \{\lambda x \mid x \in I\}$.
   (a) Démontrer que, si $\lambda \geq 0$, $\max(\lambda I) = \lambda \max(I)$.
   (b) Montrer sur un exemple que cette formule est fausse lorsque $\lambda < 0$.
   (c) Déterminer et démontrer la formule correcte lorsque $\lambda < 0$.

2 Premier exemple

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère deux familles de réels $(u_1, \ldots, u_N)$ et $(v_1, \ldots, v_N)$.
On introduit les notations $M(u) = \max\{u_1, \ldots, u_N\}, m(u) = \min\{u_1, \ldots, u_N\}$. On définit de même $M(v)$ et $m(v)$.

1. Démontrer que $\max_{1 \leq k \leq N}(u_k + v_k) \leq M(u) + M(v)$.
2. Démontrer que $\min_{1 \leq k \leq N}(u_k + v_k) \geq m(u) + m(v)$.
3. Démontrer que $M(u) + m(v) \leq \max_{1 \leq k \leq N}(u_k + v_k) \leq M(u) + M(v)$.
4. Donner un exemple de deux familles pour lesquelles l'inégalité de la question 1 est stricte.
5. Démontrer qu'il y a égalité dans la question 1 ssi il existe un indice $k \in [\![1, N]\!]$ tel que $u_k = M(u)$ et $v_k = M(v)$.

3 Propriétés plus avancées

Soit I un ensemble fini non vide de réels. On définit $|I| = \{|x| \mid x \in I\}$.

1. Démontrer que $\max(|I|) = \max\big(-\min(I), \max(I)\big)$.
2. Soient I et J deux ensembles finis non vides. On définit $I + J = \{x + y \mid x \in I,\ y \in J\}$.
   Démontrer que $\max(I + J) = \max(I) + \max(J)$, puis énoncer une propriété analogue pour le minimum.
3. Démontrer que $\max(|I + J|) \leq \max(|I|) + \max(|J|)$.
4. Donner un exemple où l'inégalité précédente est stricte, puis un exemple où il y a égalité.
5. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et deux familles de réels $(u_1, \ldots, u_N)$ et $(v_1, \ldots, v_N)$.
   Démontrer que $\max_{1 \leq k \leq N} |u_k + v_k| \leq \max_{1 \leq k \leq N} |u_k| + \max_{1 \leq k \leq N} |v_k|$.
6. Soient I et J deux ensembles finis non vides. On définit $IJ = \{xy \mid x \in I,\ y \in J\}$.
   Démontrer que $\max(|IJ|) = \max(|I|) \max(|J|)$.

4 Pour aller encore plus loin

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère deux familles de réels $(u_1, \dots, u_N)$ et $(v_1, \dots, v_N)$.

1. Justifier que, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,
$$u_k \leq v_k + |u_k - v_k|.$$
2. En déduire que
$$\max_{1\leq k\leq N} u_k \leq \max_{1\leq k\leq N} v_k + \max_{1\leq k\leq N} |u_k - v_k|.$$
3. Démontrer finalement que
$$\left| \max_{1\leq k\leq N} u_k - \max_{1\leq k\leq N} v_k \right| \leq \max_{1\leq k\leq N} |u_k - v_k|.$$
4. Énoncer et démontrer une inégalité analogue pour les minima.