1 Recherche de primitives

Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants, sur un intervalle à déterminer.

1. $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.
2. $f(x) = (x+3)(x+2)$.
3. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$.
5. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels.
6. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+2}$.

2 Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$.
2. $\displaystyle\int_0^1 2x^2 e^{-x^3/2} dx$.
3. $\displaystyle\int_0^4 |x-2| dx$.
4. $\displaystyle\int_0^2 x^2 \lfloor x \rfloor dx$.

3 Calcul d'intégrale simple

1. *EDHEC 2013* Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-|t|)\,\mathrm{d}t$.
2. *EDHEC 2019* Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t$.
3. *EDHEC 2019* Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^2\,\mathrm{d}t$.
4. *EDHEC 2019* Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t$, où $n \in \mathbb{N}$.
5. *EDHEC 2017* Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x+t)^2\,\mathrm{d}t$, où $x \in \mathbb{R}$.
6. *Ecricome 2005* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.
7. *EDHEC 2004* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t$.
8. *EDHEC 2020* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.
9. *Ecricome 2004* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.
10. *EDHEC 2001* Calculer $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$, où $x \geqslant 0$.
11. *EDHEC 2005* Calculer $\displaystyle\int_0^x a(1-t)^{a-1}\,\mathrm{d}t$, où $a > 0$ et $x \in [0,1[$.
12. *EDHEC 2007* Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, où $x \geqslant 1$.
13. *EM Lyon 2008* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{2-t}\,\mathrm{d}t$. *On pourra chercher* $a, b \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $\dfrac{t}{2-t} = a + \dfrac{b}{2-t}$
14. *EDHEC 2020* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.
    Un CDV à poser
15. *Ecricome 2002* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
    Un CDV à poser
16. *Ecricome 2005* Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.
17. *Ecricome 2002* Calculer $\displaystyle\int_0^1 t\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$. (IPP, puis utiliser la question 15)
18. *EM Lyon 2013* Calculer $\displaystyle\int_x^1 -t\ln(t)\,\mathrm{d}t$, où $x \in]0,1[$.
19. *EM 2020* Calculer $\displaystyle\int_{-2}^2 t\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t$.
20. *EM Lyon 2020* Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$.

4 Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes. Pour la dernière, une fois l'IPP effecctuée, reconnaître une forme semblable à $\frac{u'}{u}$ (dont la primitive est $\ln(u)$)

1. $\int_0^1 xe^x dx$.
2. $\int_0^\pi \cos(t)t^2 dt$. (deux IPP)
3. $\int_0^1 1 \times \ln(1+t^2) dt$.

5 Changement de variable

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx \quad (u = x^3)$.
2. $\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{1+\ln t}} dt \quad (x = \ln t)$.
3. $\int_0^1 \frac{t^3}{(1+t)^3} dt \quad (u = t+1)$.
4. $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx \quad (u = \sqrt{x+1})$.
5. $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x+1} dx \quad (u = e^x+1)$.
6. $\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{t^2-3t+\frac{5}{4}}{\sqrt{2t+3}}\, dt \quad \left(u = t+\frac{3}{2}\right)$.

6 Calcul d'intégrales supplémentaires

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_1^e (\ln t)^2 dt$. (IPP)
2. $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos t}{1+\sin t} dt$. (poser $u = 1+\sin(t)$, calculer u'.)
3. $\int_0^1 1 \times \arctan t\, dt$. (IPP. Puis reconnaître u'/u.)
4. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$. (IPP)
5. $\int_0^1 (x-1)e^{-x} dx$. (IPP : dériver le polynôme)

7 Décomposition en éléments simples

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 0\}$, $\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t-1}$.
2. En déduire $\int_2^3 \frac{1}{t(t^2-1)} dt$.

8 Étude de convergence

1. Montrer que $\int_0^{\pi/3} (\sin t)^n dt \to 0$ quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que $\int_0^\pi e^{-nt} \cos\left(\frac{t}{n}\right) dt \to 0$ quand $n \to +\infty$.

9 Fonctions définies par intégrales

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère φ, ψ deux fonctions de I dans J dérivables sur I, et $f : J \to \mathbb{R}$ continue sur J. Pour tout $x \in I$, on pose $u(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt$.

1. Montrer que u est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

2. Soit v définie par $v(x) = \displaystyle\int_{1/x^2}^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.
   (a) Montrer que v est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire.
   (b) Montrer que v est constante sur $\mathbb{R}^*$ et préciser la valeur de cette constante.
3. Soit g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$.
   (a) Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et étudier sa parité.
   (b) Montrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*)$, et calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$.

● ● ● ○ 10 Suite d'intégrales dépendant d'un paramètre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^2 x(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_0.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

● ● ○ ○ 11 Limites de suites et sommes

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Pour chacune de ces sommes, écrire un programme Python pour vérifier les résultats obtenus.

● ● ● ○ 12 Suites définies par intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} dt$.
3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

● ● ● ○ 13 Suite définie par intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée.

3. En déduire la valeur de u_0.
4. Calculer u_1.
5. Démontrer que (u_n) est décroissante et en déduire sa nature.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de (u_n).

● ● ● ○ 14 Limite d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,dt, \quad x \in [1, +\infty[$.

1. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, calculer $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$.
2. Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leq \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+\sqrt{t}} \leq \dfrac{1}{t^{3/2}}$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. Retrouver ce résultat en calculant l'intégrale à l'aide d'un changement de variable.

● ● ● ● 15 Suite d'intégrales trigonométriques

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

1. Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0, I_1 et I_2. *Indication : pour calculer I_2, on pourra exprimer $\cos^2(t)$ en fonction de $\cos(2t)$.*
3. (a) Étudier la monotonie de la suite (I_n).
   (b) En déduire que (I_n) converge.
   (c) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
   Indication : on pourra remarquer que $\cos^{n+1}(t) = \cos^n(t) \times \cos(t)$.
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2n!!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Ces calculs permettent de dire que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$... Mais c'est pour une autre fois !

● ● ● ● 16 Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer la dérivée de f et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Par encadrement, montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln 2$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
6. (a) Montrer que pour tout réel x, on a $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(c) En déduire l'expression explicite de f.

7. (a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\,(1+\sqrt{t^2+1})}\,dt.$$

(b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$0 \leq x - f(x) \leq \tfrac{7}{6}x^3.$$

(c) Conclure que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

(d) Montrer que l'on a aussi $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

• • • • 17 Étude d'une fonction logarithmique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et $+\infty$.
2. On note Φ la fonction donnée par : $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt$.

(a) Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a, pour $x > 0$,$\Phi'(x) = \dfrac{\ln(2x) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$.

(b) En déduire les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq \Phi(x) \leq x$.
4. (a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

(b) Montrer : $\lim_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$. On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

5. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$. Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

• • • • 18 Inspiré d'Ecricome 2025

Nous allons calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ avec des intégrales.

1. Soit k un entier naturel non nul. Calculer les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(kt)\,dt$.
2. En déduire deux constantes a et b (indépendantes de k) telles que $\displaystyle\int_0^{\pi} (at+bt^2)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}$.
3. On pose $S_n(t) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que $\displaystyle\int_0^{\pi} (at+bt^2)S_n(t)\,dt = C + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, où C est une constante qu'on exprimera en fonction de a et de b.
4. Vérifier que, $\forall t \in]0,\pi[$, on a $S_n(t) = \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

Que vaut $S_n(0)$?

5. Montrer que la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $t \mapsto \dfrac{at+bt^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

(on pourra utiliser si besoin que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = \cos(0) = 1$).

6. Montrer que, si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\int_0^\pi g(t)\sin(kt)\,dt = 0$

   (on pourra effectuer une IPP).

7. Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

● ○ ○ ○ 19 Une suite d'intégrales avec une exponentielle (plus guidé)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.

   Il suffit de dire qu'une fonction est continue pour avoir la bonne définition d'une intégrale sur un segment. Pour la positivité, quelle propriété du cours réponds à cette question ?

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Vous pourrez étudier le signe, sur $[0,1]$, de $t^{n+1}e^{-t} - t^n e^{-t}$, puis utiliser la positivité de l'intégrale

3. En déduire que I_n converge.

4. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Démontrer que, pour tout $t\in[0,1]$, $0\leq e^{-t}\leq 1$, puis en déduire cette inégalité

5. Calculer I_0.

6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.

   Partir du membre de gauche, et dériver t^{n+1}.

7. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n = n!\left(1 - e^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.

   Il faut faire l'hérédité en y croyant. Courage, rien de trop difficile ! (et en utilisant la question précédente pour l'hérédité, bien sûr)

● ● ○ ○ 20 Une suite d'intégrales avec une exponentielle (plus dur)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Calculer I_0.
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.
6. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n = n!\left(1 - e^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.

● ● ● ○ 21 Une suite d'intégrales symétriques (plus guidé)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.

   Quelle propriété de la fonction intégrée assure l'existence de l'intégrale sur le segment $[0,1]$? Pour la positivité, étudier le signe de cette fonction sur $[0,1]$.

2. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

   Pour la majoration, passez du même côté et dérivez / Étudiez le polynôme de degré 2.

3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Factoriser $t^{n+1}(1-t)^{n+1} - t^n(1-t)^n$ par $t^n(1-t)^n$, puis étudier le signe de la différence.

4. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Élever l'encadrement de la question 2 à la puissance n, et ça passe !

6. Calculer I_0.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-2t)^2 t^n(1-t)^n\,dt$.

   (a) Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto t^{n+1}(1-t)^{n+1}$.
   Utiliser la formule de dérivation d'un produit, puis factoriser par $(n+1)t^n(1-t)^n$.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \dfrac{2}{n+1} I_{n+1}$.

   Écrire l'intégrande comme le produit de $1-2t$ et de $(1-2t)t^n(1-t)^n$. Dériver le premier facteur et utiliser la question précédente pour trouver une primitive du second.

   (c) Vérifier que $(1-2t)^2 = 1 - 4t(1-t)$. En déduire que $J_n = I_n - 4I_{n+1}$.
   Remplacer $(1-2t)^2$ par cette expression dans J_n, puis utiliser la linéarité de l'intégrale.

   (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)} I_n$.

   Utilisez les questions précédentes, et ça devrait aller.

8. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

   On y croit !

● ● ● ○ 22 Une suite d'intégrales symétriques (plus dur)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.
2. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Calculer I_0.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-2t)^2 t^n(1-t)^n\,dt$.

(a) Dériver $t \to t^{n+1}(1-t)^{n+1}$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \dfrac{2}{n+1} I_{n+1}$.
On partira de J_n, que l'on écrira comme $(1-2t) \times (1-2t)t^n(1-t)^n$

(c) En développant $(1-2t)^2$, montrer que $J_n = I_n - 4I_{n+1}$.

(d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)} I_n$.

7. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

● ● ○ ○ 23 Une suite d'intégrales avec un logarithme (plus guidé)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t)\big)^n \, dt$. On convient que $\big(\ln(1+t)\big)^0 = 1$ pour tout $t \in [0,1]$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.
Justifier la continuité de la fonction intégrée sur $[0,1]$, puis étudier son signe sur cet intervalle.

2. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln 2 < 1$.
Utiliser la croissance de la fonction logarithme, ainsi que l'inégalité $2 < e$.

3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Si on fait $I_{n+1} - I_n$ et qu'on factorise dans l'intégrande, ça devrait bien se passer.

4. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant (\ln 2)^n$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Élever l'encadrement de la question 2 à la puissance n, puis intégrer sur $[0,1]$.

6. Calculer I_0.

7. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n$.
Partir de I_{n+1}, dériver $\big(\ln(1+t)\big)^{n+1}$ et utiliser $t \mapsto 1+t$ comme primitive de la fonction constante égale à 1. Le facteur $1+t$ permettra une simplification.

8. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (-1)^n n! \left(2 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ln 2)^k}{k!} - 1 \right)$.

Croyez-y ! Et prenez votre temps !

● ● ● ○ 24 Une suite d'intégrales avec un logarithme

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t)\big)^n \, dt$. On convient que $\big(\ln(1+t)\big)^0 = 1$ pour tout $t \in [0,1]$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant (\ln 2)^n$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Calculer I_0.

5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n$.
On pourra utiliser la fonction $t \mapsto 1+t$ comme primitive de la fonction constante égale à 1.

6. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (-1)^n n! \left(2 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ln 2)^k}{k!} - 1 \right)$.