1 Recherche de primitives

Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants, sur un intervalle à déterminer.

1. $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.
2. $f(x) = (x+3)(x+2)$.
3. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$.
5. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels.
6. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+2}$.

Correction

1. $f(x) = -\sqrt{x} + x^{3/2}$. On reconnaît la forme x^α, de primitive $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Donc, une primitive est $F : x \to -\dfrac{2}{3}x^{3/2} + \dfrac{2}{5}x^{5/2}$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$, et c'est un polynôme. Donc, $f(x) = x^2 + 5x + 6$, et une primitive est $F : x \to \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 + 6x$
3. La fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, que $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x+1}$. Une primitive est $F : x \to x + 2\ln(|x+1|)$.
4. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$, que
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}.$$
Une primitive est $F : x \to x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x)$.
5. C'est un polynôme, donc défini sur $\mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégration, $F : x \to \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une primitive.
6. f est définie sur $\mathbb{R}$, et vaut $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2+1}$. Donc, une primitive est $F : x \to \dfrac{1}{2}\arctan(x)$.

2 Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$.
2. $\displaystyle\int_0^1 2x^2 e^{-x^3/2} dx$.
3. $\displaystyle\int_0^4 |x-2| dx$.
4. $\displaystyle\int_0^2 x^2 \lfloor x \rfloor dx$.

Corrigé

1. Usuel : $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\ln(x) - \frac{1}{x}\right]_1^e = 2 - \frac{1}{e}$
2. On reconnaît que $(e^{-x^3/2})' = -\dfrac{3}{2}x^2 e^{-x^3/2}$. Donc, une primitive de $2x^2 e^{-x^3/2}$ est $-\dfrac{4}{3}e^{-x^3/2}$. D'où
$$\int_0^1 2x^2 e^{-x^3/2} dx = \left[-\frac{4}{3}e^{-x^3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\left(1 - e^{-1/2}\right).$$

3. Par définition de la valeur absolue ($|x-2| = x-2$ lorsque $x \geq 2$, et $2-x$ lorsque $x \leq 2$) :

$$\int_0^4 |x-2|dx = \int_0^2 |x-2|dx + \int_2^4 |x-2|dx = \int_0^2 2-xdx + \int_2^4 x-2dx = [2x-x^2/2]_0^2 + [x^2/2-2x]_2^4 = 4$$

4. On utilise la relation de Chasles, et que $\lfloor x \rfloor$ pour $0 \leq x < 1$ et $\lfloor x \rfloor = 1$ pour $1 \leq x < 2$:

$$\int_0^2 x^2\lfloor x \rfloor dx = \int_0^1 x^2\lfloor x \rfloor dx + \int_1^2 x^2\lfloor x \rfloor dx = \int_0^1 x^2 \times 0 dx + \int_1^2 x^2 dx = 0 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}.$$

3 Calcul d'intégrale simple

1. *EDHEC 2013* Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-|t|)\,\mathrm{d}t$.
2. *EDHEC 2019* Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t$.
3. *EDHEC 2019* Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^2\,\mathrm{d}t$.
4. *EDHEC 2019* Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t$, où $n \in \mathbb{N}$.
5. *EDHEC 2017* Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x+t)^2\,\mathrm{d}t$, où $x \in \mathbb{R}$.
6. *Ecricome 2005* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.
7. *EDHEC 2004* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t$.
8. *EDHEC 2020* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.
9. *Ecricome 2004* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.
10. *EDHEC 2001* Calculer $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$, où $x \geqslant 0$.
11. *EDHEC 2005* Calculer $\displaystyle\int_0^x a(1-t)^{a-1}\,\mathrm{d}t$, où $a > 0$ et $x \in [0,1[$.
12. *EDHEC 2007* Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, où $x \geqslant 1$.
13. *EM Lyon 2008* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{2-t}\,\mathrm{d}t$. *On pourra chercher $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que* $\displaystyle\frac{t}{2-t} = a + \frac{b}{2-t}$
14. *EDHEC 2020* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.
    Un CDV à poser
15. *Ecricome 2002* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
    Un CDV à poser
16. *Ecricome 2005* Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.
17. *Ecricome 2002* Calculer $\displaystyle\int_0^1 t\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$.
18. *EM Lyon 2013* Calculer $\displaystyle\int_x^1 -t\ln(t)\,\mathrm{d}t$, où $x \in]0,1[$.
19. *EM 2020* Calculer $\displaystyle\int_{-2}^2 t\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t$.
20. *EM Lyon 2020* Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé

1. Sur $[0,1]$, on a $|t| = t$, et sur $[-1,0]$, $|t| = -t$. Par la relation de Chasles :
   $$\int_{-1}^1 (1-|t|)\,dt = \int_{-1}^0 (1+t)dt + \int_0^1 (1-t)\,dt = \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^0 \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1.$$
2. $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)\,dt = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$
3. En développant, $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^2\,dt = \int_0^1 (1-2t^2+t^4)\,dt = \left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{8}{15}.$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$

5. On intègre par rapport à t, donc x est une constante. Ainsi,
$$\int_0^1 (x+t)^2\,dt = \left[\frac{(x+t)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3}{3} = x^2+x+\frac{1}{3}.$$

6. $\displaystyle\int_0^1 e^{-2t}\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-2}}{2}.$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2+t} = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln(3)-\ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

9. On reconnaît que $(\sqrt{1+t^2})' = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = [\sqrt{1+t^2}]_0^1 = \sqrt{2}-1.$

10. On a $(e^{-t^2/2})' = -te^{-t^2/2}$. D'où $\displaystyle\int_0^x te^{-t^2/2}\,dt = [-e^{-t^2/2}]_0^x = 1-e^{-x^2/2}.$

11. Pour $t\in[0,x]$, $((1-t)^a)' = -a(1-t)^{a-1}$. Donc $\displaystyle\int_0^x a(1-t)^{a-1}\,dt = [-(1-t)^a]_0^x = 1-(1-x)^a.$

12. On reconnaît la forme $u'u$, avec $u(t)=\ln(t)$. Donc $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^x = \frac{(\ln x)^2}{2}.$

13. On écrit $t = -(2-t)+2$, donc $\dfrac{t}{2-t} = -1+\dfrac{2}{2-t}$. *on peut aussi faire le système, et on tombe sur la même chose.*
Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{2-t}\,dt = \int_0^1 -1+\frac{2}{2-t}\,dt = [-t-2\ln(2-t)]_0^1 = 2\ln(2)-1.$

14. On pose $u=1+t$, donc $du=dt$. Lorsque t varie de 0 à 1, u varie de 1 à 2. Le changement de variable est licite car affine. D'où
$$\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}\,dt = \int_1^2 \frac{u-1}{u^2}\,du = \int_1^2 \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)\,du = \left[\ln(u)+\frac{1}{u}\right]_1^2 = \ln(2)-\frac{1}{2}.$$

15. On pose de même $u=1+t$, donc $du=dt$ et les nouvelles bornes sont 1 et 2. Le CDV est licite car affine. Il vient
$$\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt = \int_1^2 \frac{(u-1)^2}{u}\,du = \int_1^2 \left(u-2+\frac{1}{u}\right)\,du = \left[\frac{u^2}{2}-2u+\ln(u)\right]_1^2 = \ln(2)-\frac{1}{2}.$$

16. On pose $u(t)=1-t$ et $v'(t)=e^{-2t}$, donc $v(t)=-\dfrac{1}{2}e^{-2t}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties,
$$\int_0^1 (1-t)e^{-2t}\,dt = \left[-\frac{1-t}{2}e^{-2t}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}-\frac{1-e^{-2}}{4} = \frac{1+e^{-2}}{4}.$$

17. On pose $u(t)=\ln(1+t)$ et $v'(t)=t$, donc $v(t)=\dfrac{t^2}{2}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties et d'après la question 15,
$$\int_0^1 t\ln(1+t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt = \frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

18. On pose $u(t)=\ln(t)$ et $v'(t)=-t$, donc $v(t)=-\dfrac{t^2}{2}$. Comme $x>0$, u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[x,1]$. Par intégration par parties,
$$\int_x^1 -t\ln(t)\,dt = \left[-\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{t}{2}\,dt = \frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{1-x^2}{4}.$$

19. **Méthode 1.** On reconnaît quelque chose de la forme $u'\sqrt{u}$. Une primitive est donc de la forme $u^{3/2}$. On pose $u(x) = (4-t^2)^{3/2}$. On a $u'(x) = \frac{3}{2} \times (-2t) \times \sqrt{4-t^2} = -3t\sqrt{4-t^2}$. Donc, la primitive de l'intégrande est $-\frac{1}{3}u$. D'où

$$\int_{-2}^{2} t\sqrt{4-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{3}(4-t^2)^{3/2}\right]_{-2}^{2} = 0 - 0 = 0.$$

Méthode 2 La fonction $t \mapsto t\sqrt{4-t^2}$ est continue et impaire sur $[-2,2]$. Les bornes étant opposées, $\displaystyle\int_{-2}^{2} t\sqrt{4-t^2}\,dt = 0$.

20. On utilise $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$. Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

4 Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes. Pour la dernière, une fois l'IPP effecctuée, il faut utiliser que $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{t^2+1-1}{1+t^2}$.

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$.
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)t^2 dt$. (deux IPP)
3. $\displaystyle\int_0^1 1 \times \ln(1+t^2) dt$.

Correction

1. On pose $u : x \to x$ et $v' : x \to e^x$, donc $v : x \to e^x$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,1])$. Par intégration par partie,
$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x = e - e + 1 = 1.$$
2. On pose $u : x \to x^2$ et $v' : x \to \cos(x)$, donc $v : x \to \sin(x)$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,\pi])$. Par intégration par partie,
$$\int_0^{\pi} \cos(t)t^2 dt = [t^2\sin(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t\sin(t) dt = -2\int_0^{\pi} t\sin(t) dt$$
On refait une intégration par partie avec $u : t \to t$ et $v' : t \to \sin(t)$, donc $v : t \to -\cos(t)$. On a donc
$$-2\int_0^{\pi} t\sin(t) dt = [2t\cos(t)]_0^{\pi} - (-2)\int_0^{\pi} -\cos(t) dt = -2\pi - 2[\sin(t)]_0^{\pi} = -2\pi.$$
3. On pose $u : x \to \ln(1+x^2)$ et $v' : x \to 1$, donc $v : x \to x$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,1])$. Par intégration par partie,
$$\begin{aligned}
\int_0^1 1 \times \ln(1+t^2)\,dt &= [t\ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 t\frac{2t}{1+t^2}\,dt \\
&= \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt \\
&= \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\
&= \ln(2) - 2 + \arctan(1) - \arctan(0) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

5 Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes. Pour la dernière, une fois l'IPP effecctuée, il faut utiliser que $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{t^2+1-1}{1+t^2}$.

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$.
2. $\displaystyle\int_0^\pi \cos(t)t^2 dt$. (deux IPP)
3. $\displaystyle\int_0^1 1\times\ln(1+t^2)dt$.

Correction

1. On pose $u : x \to x$ et $v' : x \to e^x$, donc $v : x \to e^x$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,1])$. Par intégration par partie,
$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x = e - e + 1 = 1.$$
2. On pose $u : x \to x^2$ et $v' : x \to \cos(x)$, donc $v : x \to \sin(x)$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,\pi])$. Par intégration par partie,
$$\int_0^\pi \cos(t)t^2 dt = [t^2\sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi 2t\sin(t)dt = -2\int_0^\pi t\sin(t)dt$$
On refait une intégration par partie avec $u : t \to t$ et $v' : t \to \sin(t)$, donc $v : t \to -\cos(t)$. On a donc
$$-2\int_0^\pi t\sin(t)dt = [2t\cos(t)]_0^\pi - (-2)\int_0^\pi -\cos(t)dt = -2\pi - 2[\sin(t)]_0^\pi = -2\pi.$$
3. On pose $u : x \to \ln(1+x^2)$ et $v' : x \to 1$, donc $v : x \to x$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,1])$. Par intégration par partie,
$$\begin{aligned}\int_0^1 1\times\ln(1+t^2)\,dt &= [t\ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 t\frac{2t}{1+t^2}\,dt\\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt\\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt\\ &= \ln(2) - 2 + \arctan(1) - \arctan(0) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

6 Changement de variable

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx \quad (u = x^3)$.
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{1+\ln t}}dt \quad (x = \ln t)$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{(1+t)^3}dt \quad (u = t+1)$.
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx \quad (u = \sqrt{x+1})$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx \quad (u = e^x+1)$.
6. $\displaystyle\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{t^2-3t+\frac{5}{4}}{\sqrt{2t+3}}\,dt \quad \left(u = t+\frac{3}{2}\right)$.

Corrigé

1. On pose $u = x^3$.
   (a) Bornes :

bornes	0	1
$u = x^3$	0	1

   (b) Si on pose $\phi : x \in [0,1] \to x^3$, alors $\phi' : x \to 3x^2 > 0$ sur $]0,1]$, donc le changement de variable est bien légal.
   (c) Avec $u = x^3$, on obtient $du = 3x^2dx$.

   Donc,
$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+(x^3)^2}(3x^2dx) = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{3}[\arctan(u)]_0^1 = \frac{1}{3}\arctan(1) = \frac{\pi}{12}$$

2. On pose $x = \ln t$.

   (a) Bornes :

bornes	1	e
$x = \ln t$	0	1

   (b) Si on pose $\phi : t \in [1, e] \to \ln t$, alors $\phi' : t \to \dfrac{1}{t} > 0$ sur $[1, e]$, donc le changement de variable est bien légal.

   (c) Avec $x = \ln t$, on obtient $dx = \dfrac{dt}{t}$.

   Donc,

$$\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{1+\ln t}}\,dt = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1+\ln t}}\frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$$

3. On pose $u = t + 1$.

   (a) Bornes :

bornes	0	1
u=t+1	1	2

   (b) Le changement de variable est licite car il est affine.

   (c) Avec $u = t + 1$, on obtient $du = dt$ et $t = u - 1$.

   Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^3}{(1+t)^3}\,dt &= \int_1^2 \frac{(u-1)^3}{u^3}\,du \\
&= \int_1^2 \left(1 - \frac{3}{u} + \frac{3}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right)du \\
&= \left[u - 3\ln(u) - \frac{3}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]_1^2 \\
&= \left(2 - 3\ln(2) - \frac{3}{2} + \frac{1}{8}\right) - \left(1 - 3 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{17}{8} - 3\ln(2).
\end{aligned}$$

4. On pose $u = \sqrt{x+1}$.

   (a) Bornes :

bornes	1	2
$u = \sqrt{x+1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

   (b) Si on pose $\phi : x \in [1, 2] \mapsto \sqrt{x+1}$, alors ϕ est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[1, 2]$, donc le changement de variable est bien licite. ($\phi'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}} > 0$.)

   (c) Avec $u = \sqrt{x+1}$, on obtient $x = u^2 - 1$ et $dx = 2u\,du$.

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2-1-1}{u}\,2u\,du \\
&= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (u^2-2)\,du \\
&= 2\left[\frac{u^3}{3}-2u\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\
&= 2\left(\frac{(\sqrt{3})^3}{3}-2\sqrt{3}-\frac{(\sqrt{2})^3}{3}+2\sqrt{2}\right) \\
&= 2\left(\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}\right) \\
&= 2\left(-\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

5. On pose $u = e^x + 1$.

   (a) Bornes :

bornes	0	1
$u = e^x + 1$	2	$e+1$

   (b) Si on pose $\phi : x \in [0,1] \mapsto e^x + 1$, alors ϕ est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0,1]$, donc le changement de variable est bien licite. (Autre manière de l'écrire : $\phi' : x \to e^x > 0$, donc le changement de variable est bien licite).

   (c) Avec $u = e^x + 1$, on obtient $du = e^x\,dx$ et $x = \ln(u-1)$ (On pourrait aussi remplacer $dx = \frac{du}{u-1}$, ça marche bien.)

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx &= \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,(e^x dx) \\
&= \int_2^{e+1} \frac{(u-1)^2}{u}\,du \\
&= \int_2^{e+1} \left(u-2+\frac{1}{u}\right)\,du \\
&= \left[\frac{u^2}{2}-2u+\ln(u)\right]_2^{e+1} \\
&= \left(\frac{(e+1)^2}{2}-2(e+1)+\ln(e+1)\right)-(2-4+\ln(2)) \\
&= \frac{e^2-2e+1}{2}+\ln\left(\frac{e+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

6. On pose $u = t + \frac{3}{2}$.

   (a) Bornes :

bornes	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$u = t + \frac{3}{2}$	1	4

   (b) Le changement de variable est licite car il est affine.

   (c) Avec $u = t + \frac{3}{2}$, on obtient $du = dt$ et $t = u - \frac{3}{2}$.

Donc,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{t^2-3t+\frac{5}{4}}{\sqrt{2t+3}}\,dt &= \sqrt{2}\int_1^4 \frac{\left(u-\frac{3}{2}\right)^2-3\left(u-\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{4}}{\sqrt{2u}}\,du \\
&= \int_1^4 \frac{\left(u-\frac{3}{2}\right)^2-3\left(u-\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{4}}{\sqrt{u}}\,du \\
&= \int_1^4 \frac{u^2-6u+8}{\sqrt{u}}\,du \\
&= \int_1^4 \left(u^{3/2}-6u^{1/2}+8u^{-1/2}\right)\,du \\
&= \left[\frac{2}{5}u^{5/2}-4u^{3/2}+16u^{1/2}\right]_1^4 \\
&= \left(\frac{2}{5}\times 4^{5/2}-4\times 4^{3/2}+16\times 4^{1/2}\right)-\left(\frac{2}{5}-4+16\right) \\
&= \left(\frac{64}{5}-32+32\right)-\left(\frac{2}{5}+12\right) \\
&= \frac{64}{5}-\frac{62}{5} \\
&= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

7 Calcul d'intégrales supplémentaires

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^e (\ln t)^2 dt$. (IPP)
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\cos t}{1+\sin t} dt$. (poser $u = 1+\sin(t)$, calculer u'.)
3. $\displaystyle\int_0^1 1\times \arctan t\, dt$. (IPP. Puis reconnaître u'/u.)
4. $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x) dx$. (IPP)
5. $\displaystyle\int_0^1 (x-1)e^{-x} dx$. (IPP : dériver le polynôme)

Correction

1. **Méthode 1 :** On pose $u : t \to (\ln t)^2$ et $v' : t \to 1$, donc $v : t \to t$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([1,e])$. Par intégration par partie,

$$\int_1^e (\ln t)^2 dt = [t(\ln t)^2]_1^e - \int_1^e 2\ln(t) dt = e - 2\int_1^e \ln(t) dt.$$

Ou alors on sait que $x \to \ln(x)$ a comme primitive $x \to x\ln(x) - x$, ou alors on refait une IPP (qu'on fait ici). On refait une intégration par partie avec $u : t \to \ln(t)$ et $v' : t \to 1$, donc $v : t \to t$. On a donc

$$\int_1^e \ln(t) dt = [t\ln(t)]_1^e - \int_1^e 1 dt = e - (e-1) = 1.$$

Ainsi,

$$\int_1^e (\ln t)^2 dt = e - 2\times 1 = e - 2.$$

Méthode 2 : (Si on connaît la primitive du logarithme). On pose $u : t \to \ln(t)$ et $v' : t \to \ln(t)$, donc $v : t \to t\ln(t) - t$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([1,e])$. Par intégration par partie,

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln t)^2 dt &= [\ln(t)(t\ln(t)-t)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t}(t\ln(t)-t)dt \\ &= [t(\ln(t))^2 - t\ln(t)]_1^e - \int_1^e (\ln(t)-1)dt \\ &= (e-e) - 0 - \int_1^e \ln(t)dt + \int_1^e 1\,dt \\ &= -[t\ln(t)-t]_1^e + [t]_1^e \\ &= -1 + (e-1) \\ &= e-2.\end{aligned}$$

2. Comme dit dans l'énoncé, on pose $u : t \to 1 + \sin(t)$. On a $u' : t \to \cos(t)$. On a donc

$$\int_0^{\pi/3} \frac{u'(t)}{u(t)}dt = [\ln(u)]_0^{\pi/3} = \ln(1+\sqrt{3}/2) - \ln(1) = \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. On pose $u : t \to \arctan(t)$ et $v' : t \to 1$, donc $v : t \to t$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,1])$. Par intégration par partie,

$$\int_0^1 1 \times \arctan(t)\,dt = [t\arctan(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt. = \arctan(1) - \arctan(0) - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

De plus,

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt.$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$, avec $u : t \to 1+t^2$. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est donc $\ln(u)$, d'où

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \arctan(t)\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

4. On pose $u : x \to \ln(x)$ et $v' : x \to x^2$, donc $v : x \to \frac{x^3}{3}$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([1,2])$. Par intégration par partie,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2\ln(x)\,dx &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{9}(8-1) \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}.\end{aligned}$$

5. On pose $u : x \to x-1$ et $v' : x \to e^{-x}$, donc $v : x \to -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,1])$. Par intégration par partie,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx &= \left[-(x-1)e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx \\ &= (-0) - 1 + \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\ &= -1 - e^{-1} + 1 \\ &= -e^{-1}.\end{aligned}$$

8 Décomposition en éléments simples

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 0\}$,
$$\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t-1}.$$
2. En déduire $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t(t^2-1)} dt$.

Correction

1. On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$,
$$\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t-1}.$$
Comme $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, en multipliant par $t(t-1)(t+1)$, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$,
$$1 = a(t-1)(t+1) + bt(t-1) + ct(t+1) = a(t^2-1) + b(t^2-t) + c(t^2+t) = (a+b+c)t^2 + (-b+c)t - a.$$
On identifie alors les coefficients :
$$\begin{aligned}
\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ -b+c &= 0 \\ -a &= 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ -b+c &= 0 \\ a &= -1 \end{cases} \\
\text{On remplace } a \text{ par } -1 &\iff \begin{cases} b+c &= 1 \\ -b+c &= 0 \\ a &= -1 \end{cases} \\
L_1 \leftarrow L_1 + L_2 &\iff \begin{cases} 2c &= 1 \\ -b+c &= 0 \\ a &= -1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} c &= \frac{1}{2} \\ b &= \frac{1}{2} \\ a &= -1 \end{cases}
\end{aligned}$$
Donc,
$$\frac{1}{t(t^2-1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)}.$$
2. D'après la question précédente,
$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{1}{t(t^2-1)}\, dt &= \int_2^3 \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)}\right) dt \\
&= \left[-\ln(t) + \frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{1}{2}\ln(t-1)\right]_2^3 \\
&= \left(-\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(4) + \frac{1}{2}\ln(2)\right) - \left(-\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3)\right) \\
&= \frac{5}{2}\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3).
\end{aligned}$$

9 Étude de convergence

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/3} (\sin t)^n dt \to 0$ quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nt} \cos\left(\tfrac{t}{n}\right) dt \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Correction

1. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, on a $0 \leq \sin(t) \leq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, $0 \leq (\sin t)^n \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^{\pi/3} (\sin t)^n \, dt \leq \int_0^{\pi/3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \, dt = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \to 0,$$

puisque $\frac{\sqrt{3}}{2} \in]0,1[$. Par encadrement, $\int_0^{\pi/3} (\sin t)^n \, dt \to 0$.

2. Soit $n \geq 2$. Pour tout $t \in [0,\pi]$, on a $0 \leq \frac{t}{n} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $0 \leq \cos\left(\frac{t}{n}\right) \leq 1$. Comme $e^{-nt} \geq 0$, on obtient $0 \leq e^{-nt}\cos\left(\frac{t}{n}\right) \leq e^{-nt}$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^{\pi} e^{-nt}\cos\left(\frac{t}{n}\right) dt \leq \int_0^{\pi} e^{-nt}\, dt = \left[-\frac{e^{-nt}}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-e^{-n\pi}}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

Par encadrement, $\int_0^{\pi} e^{-nt}\cos\left(\frac{t}{n}\right) dt \to 0$.

10 Fonctions définies par intégrales

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère φ, ψ deux fonctions de I dans J dérivables sur I, et $f : J \to \mathbb{R}$ continue sur J. Pour tout $x \in I$, on pose

$$u(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt.$$

1. Montrer que u est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2. Soit v définie par $v(x) = \int_{1/x^2}^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.
   (a) Montrer que v est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire.
   (b) Montrer que v est constante sur $\mathbb{R}^*$ et préciser la valeur de cette constante.
3. Soit g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$.
   (a) Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et étudier sa parité.
   (b) Montrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*)$, et calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$.

Correction

1. On note F une primitive de f. On a donc que $u(x) = F\circ\psi(x) - F\circ\varphi(x)$. Donc, u est dérivable comme différence de fonctions dérivables (F l'est comme primitive d'une fonction continue), et

$$u'(x) = \psi'(x)f(\psi(x)) - \varphi'(x)f(\varphi(x)).$$

2. (a) La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $x^2 > 0$ et $1/x^2 > 0$. Donc l'intégrale

$$v(x) = \int_{1/x^2}^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$v(-x) = \int_{1/(-x)^2}^{(-x)^2} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \int_{1/x^2}^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = v(x).$$

Donc v est paire.

(b) Sur $]0,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto 1/x^2$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivables, et la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. D'après la question 1, v est donc dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} v'(x) &= 2x\frac{\ln(x^2)}{1+x^4} - \left(-\frac{2}{x^3}\right)\frac{\ln(1/x^2)}{1+1/x^4} \\ \text{Comme } \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) \qquad &= 2x\frac{\ln(x^2)}{1+x^4} + \frac{2}{x^3}\frac{-\ln(x^2)}{1+1/x^4} \\ \text{Comme } 1+\frac{1}{x^4} = \frac{1+x^4}{x^4} \qquad &= 2x\frac{\ln(x^2)}{1+x^4} - \frac{2}{x^3}\frac{\ln(x^2)}{(1+x^4)/x^4} \\ \text{On simplifie} \qquad &= 2x\frac{\ln(x^2)}{1+x^4} - \frac{2}{x^3} \times \left(\frac{x^4\ln(x^2)}{1+x^4}\right) \\ \text{Puis} \qquad &= 2x\frac{\ln(x^2)}{1+x^4} - 2x\frac{\ln(x^2)}{1+x^4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc v est constante sur $]0,+\infty[$. De même, sur $]-\infty,0[$, la fonction v est dérivable et de dérivée nulle, donc constante sur $]-\infty,0[$. Comme v est paire, elle prend la même constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Donc v est constante sur $\mathbb{R}^*$. Enfin,

$$v(1) = \int_1^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0.$$

Donc v est constante égale à 0 sur $\mathbb{R}^*$.

3. On pose

$$f : t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, alors $[x, 2x] \subset \mathbb{R}_+^*$, et si $x < 0$, alors $[2x, x] \subset \mathbb{R}_-^*$. Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$, car pour tout $t \neq 0$, on a $1+t^2 > 1$, le logarithme est bien défini. Ainsi, $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt.$$

On effectue le changement de variable $u = -t$. Il est

i. Bornes :

bornes	$-x$	$-2x$
$u = -t$	x	$2x$

ii. Le changement de variable est licite, car affine
iii. Avec $u = -t$, on obtient $du = -dt$.

Ainsi,

$$\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt = -\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+u^2)}du = -g(x).$$

Donc,$g(-x) = -g(x)$, et g est impaire.

(b) Sur $]0,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont dérivables, et f est continue sur $]0,+\infty[$. D'après la question 1, g est donc dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

De même, sur $]-\infty,0[$, la fonction g est dérivable et, pour tout $x < 0$,

$$g'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

(Le fait que g soit impaire donne que g' est paire, donc on pouvait l'avoir aussi sans calcul). Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

Comme cette dérivée est continue sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*)$.

11 Suite d'intégrales dépendant d'un paramètre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^2 x(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_0.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

Correction

1. On a
$$I_0 = \int_1^2 x(\ln x)^0\, dx = \int_1^2 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u : x \to (\ln x)^{n+1}$ et $v' : x \to x$, donc $v : x \to \dfrac{x^2}{2}$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([1,2])$. Par intégration par partie,
$$I_{n+1} = \int_1^2 x(\ln x)^{n+1}\, dx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^{n+1}\right]_1^2 - \frac{n+1}{2}\int_1^2 x(\ln x)^n\, dx.$$
Donc
$$I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - \frac{n+1}{2} I_n.$$

3. Pour $n = 0$, la relation précédente donne
$$I_1 = 2\ln(2) - \frac{1}{2} I_0 = 2\ln(2) - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = 2\ln(2) - \frac{3}{4}.$$
Puis, pour $n = 1$, on obtient
$$I_2 = 2(\ln 2)^2 - \frac{2}{2} I_1 = 2(\ln 2)^2 - I_1 = 2(\ln 2)^2 - \left(2\ln(2) - \frac{3}{4}\right) = 2(\ln 2)^2 - 2\ln(2) + \frac{3}{4}.$$

12 Limites de suites et sommes

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{n^2+k^2}$.

Pour chacune de ces sommes, écrire un programme Python pour vérifier les résultats obtenus.

Correction

1. On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto \sin(\pi x)$, qui est continue sur $[0,1]$. Donc
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \to \int_0^1 \sin(\pi x)\, dx = \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$
Un programme Python pour vérifier ce résultat :

```python
import numpy as np

def somme1(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s += np.sin(k * np.pi / n)
    return s / n
```

2. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\dfrac{k}{n^2+k^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{k/n}{1+(k/n)^2}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{k/n}{1+(k/n)^2}.$$

C'est une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$, qui est continue sur $[0,1]$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2} \to \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2).$$

```python
import numpy as np

def somme2(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s += k / (n**2 + k**2)
    return s
```

13 Suites définies par intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$
3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{1+t}$ est continue sur $[0,1]$, car $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto 1+t$ le sont, et $1+t$ ne s'annule pas sur $[0,1]$. Donc I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   De plus, pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \le \dfrac{t^n}{1+t} \le t^n$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \le I_n \quad \le \quad \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

   Par encadrement, $I_n \to 0$.

2. **Méthode 1 : deviner une somme géométrique.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,1]$, comme $-t \neq -1$, on peut écrire la somme géométrique
$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}.$$

On intègre alors cette égalité sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-t)^k dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-t)^k dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^k dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= S_n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}dt.$$

Méthode 2 : récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P(n) : S_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}dt$.

- **Initialisation.** Pour $n=1$, on a $S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-(-t)^2}{1+t}dt &= \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t}dt \\
\text{Car } 1-t^2=(1-t)(1+t) &= \int_0^1 (1-t)\,dt \\
&= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

  Donc P_1 est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+2}}{1+t}dt - S_{n+1} &= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+2}}{1+t}dt - \left(S_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\right) \\
\text{Par } P(n) \qquad &= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+2}}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}dt - \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}-(-t)^{n+2}}{1+t}dt - \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}(1+t)}{1+t}dt - \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \\
&= \int_0^1 (-t)^{n+1}dt - \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \\
&= (-1)^{n+1}\int_0^1 t^{n+1}dt - \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \\
&= (-1)^{n+1}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

  Donc, $\int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+2}}{1+t}dt = S_{n+1}$. Donc P_{n+1} est vraie.

3. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \\ &= [\ln(1+t)]_0^1 - (-1)^{n+1}I_{n+1} \\ &= \ln(2) - (-1)^{n+1}I_{n+1}. \end{aligned}$$

Or $I_{n+1} \to 0$, donc $(-1)^{n+1}I_{n+1} \to 0$. Par conséquent, $S_n \to \ln(2)$.

14 Suite définie par intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par
$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$
Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire la valeur de u_0.
4. Calculer u_1.
5. Démontrer que (u_n) est décroissante et en déduire sa nature.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de (u_n).

Correction

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $[0,1]$, car $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^2+1$ le sont, et $x^2+1 \geq 1$ ne s'annule pas sur $[0,1]$. Donc u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La fonction f est définie sur $[0,1]$ par
$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$
Comme $x + \sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{x^2+1} \geq 1$, le logarithme est bien défini. De plus, f est dérivable sur $[0,1]$ comme composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in [0,1]$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$
3. D'après la question précédente, f est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $[0,1]$. Donc
$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(1) = \ln(1+\sqrt{2}).$$
4. On reconnaît ici une forme usuelle. En effet, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $[0,1]$, et $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Donc
$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$ car $0 \leq x \leq 1$. Comme $\sqrt{x^2+1} > 0$, on en déduit $\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$. Par croissance de l'intégrale, $u_{n+1} \leq u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ car la fonction intégrée est positive sur $[0,1]$. Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente.

6. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\sqrt{x^2+1} \geq 1$, donc $0 \leq \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Par encadrement,

$$u_n \to 0.$$

15 Limite d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\, dt, \quad x \in [1, +\infty[.$$

1. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, calculer $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$.
2. Montrer que pour tout $t \in [1,+\infty[$,
$$0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}.$$
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. Retrouver ce résultat en calculant l'intégrale à l'aide du changement de variabl $u = \sqrt{t}$.

Correction

1. Soit $x \in [1,+\infty[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[x, 2x]$, donc
$$\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2).$$

2. Soit $t \in [1,+\infty[$. On a $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+\sqrt{t}} = \dfrac{t+\sqrt{t}-t}{t(t+\sqrt{t})} = \dfrac{\sqrt{t}}{t(t+\sqrt{t})}$. Cette quantité est positive, donc
$$0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}}.$$
   De plus, comme $t + \sqrt{t} \geq t$, on obtient
$$\frac{\sqrt{t}}{t(t+\sqrt{t})} \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}}.$$

3. Soit $x \in [1,+\infty[$. D'après la question 1,
$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sqrt{t}} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t} dt = -\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}}\right) dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = -\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}}\right) dt + \ln(2).$$
   D'après la question 2, pour tout $t \in [x, 2x] \subset [1,+\infty[$,
$$\left| -\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}}\right) dt \right| \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t^{3/2}} dt = \left[-\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_x^{2x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{2x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to 0.$$
   Donc,
$$f(x) \to \ln(2).$$

4. On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

   (a) Bornes :

bornes	x	$2x$
$u = \sqrt{t}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{2x}$

   (b) Si on pose $\phi : t \in [x, 2x] \mapsto \sqrt{t}$, alors $\phi'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0$, donc le changement de variable est bien licite.

   (c) Avec $u = \sqrt{t}$, on obtient $t = u^2$ et $dt = 2u\,du$.

   Donc,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,dt \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \frac{1}{u^2+u}\,2u\,du \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \frac{2}{u+1}\,du \\ &= [2\ln(u+1)]_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \\ &= 2\ln(\sqrt{2x}+1) - 2\ln(\sqrt{x}+1) \\ &= 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}+1}{\sqrt{x}+1}\right). \end{aligned}$$

   Or,

$$\frac{\sqrt{2x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \to \sqrt{2}.$$

   Par composition par la fonction ln, qui est continue en $\sqrt{2}$, $f(x) \to 2\ln(\sqrt{2}) = \ln(2)$.

• • • • 16 Introduction à Wallis

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

1. Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0, I_1 et I_2. *Indication : pour calculer I_2, on pourra exprimer $\cos^2(t)$ en fonction de $\cos(2t)$.*
3. (a) Étudier la monotonie de la suite (I_n).
   (b) En déduire que (I_n) converge.
   (c) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

   Indication : on pourra remarquer que $\cos^{n+1}(t) = \cos^n(t) \times \cos(t)$.

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Ces calculs permettent de dire que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$... Mais c'est pour une autre fois !

Correction

1. La fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, car $t \mapsto \cos t$ l'est. Donc l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On a

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = [t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1.$$

Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$. (utiliser que $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$) et $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x) \iff -\sin^2(x) = -1 + \cos^2(x)$.) Donc

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) \, dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$, donc $(\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n$. Par croissance de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$. Donc la suite (I_n) est décroissante.

   (b) De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale, car la fonction intégrée est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, (I_n) est décroissante et minorée, donc convergente.

   (c) On pose $u : t \to (\cos t)^{n+1}$ et $v' : t \to \cos t$, donc $v : t \to \sin t$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$. Par intégration par partie :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \cos t \, dt \\
&= \left[(\cos t)^{n+1} \sin t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-(n+1)(\cos t)^n \sin t) \sin t \, dt \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \sin^2 t \, dt \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (1 - \cos^2 t) \, dt \\
&= (n+1) \left(I_n - I_{n+2}\right).
\end{aligned}$$

   Donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, puis $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

4. On procède par récurrence.

   Calcul de I_{2n}. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$: $\qquad I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 2, et $\dfrac{(2\times 0)!}{(2^0 0!)^2} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{1} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. D'après la question 3.c,

$$\begin{aligned}
I_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \\
\textit{Par } P(n) \quad &= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \\
\textit{On multiplie le numérateur et le dénominateur par } 2n+2 \quad &= \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(2(n+1))^2 (2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

   Donc $P(n+1)$ est vraie.

Calcul de I_{2n+1}. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $Q(n)$: $\quad I_{2n+1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $I_1 = 1$ d'après la question 2, et $\dfrac{(2^0 0!)^2}{1!} = 1$. Donc $Q(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vraie. D'après la question 3.c,

$$\begin{aligned} I_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1} \\ \textit{Par } Q(n) \quad &= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\ \textit{On multiplie le numérateur et le dénominateur par } 2n+2 \quad &= \frac{(2(n+1))^2 (2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\ &= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}. \end{aligned}$$

Donc $Q(n+1)$ est vraie.

• • • • 17 Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt.$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer la dérivée de f et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Par encadrement, montrer que, pour tout $x > 0$,
   $$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln 2.$$
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
6. (a) Montrer que pour tout réel x, on a $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
   (c) En déduire l'expression explicite de f.
7. (a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a
   $$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\,(1+\sqrt{t^2+1})}\, dt.$$
   (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
   $$0 \leq x - f(x) \leq \tfrac{7}{6} x^3.$$
   (c) Conclure que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.
   (d) Montrer que l'on a aussi $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Correction

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car $t^2+1 \geq 1$ ne s'annule jamais. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$ existe. Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$. On effectue le changement de variable $u = -t$.

   (a) Bornes :

bornes	$-x$	$-2x$
$u = -t$	x	$2x$

   (b) Le changement de variable est licite, car affine.

   (c) Avec $u = -t$, on obtient $du = -dt$.

   Donc

   $$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du = -f(x).$$

   Donc f est impaire.

3. (a) Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème sur les fonctions définies par une intégrale à bornes variables, f est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ (cf exo 8 pour le calcul de la dérivée):

   $$f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

   Montrons que cette quantité est strictement positive. Comme les deux termes sont positifs, on peut élever au carré car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

   $$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} &\iff \frac{4}{4x^2+1} > \frac{1}{x^2+1} \\ &\iff 4(x^2+1) > 4x^2+1 \\ &\iff 4 > 1. \end{aligned}$$

   Cette dernière inégalité étant vraie, on a bien $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x, 2x]$, on a (si vous voulez vérifier, passez cela au carré qui est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$)

   $$t \leq \sqrt{t^2+1} \leq t+1.$$

   En prenant les inverses,

   $$\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}.$$

   Par croissance de l'intégrale,

   $$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,dt \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \iff \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2).$$

   (b) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$,

   $$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2).$$

   Or, par continuité du logarithme en 2, $\ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) \to \ln(2)$ quand $x \to +\infty$. Par encadrement, on obtient donc que $f(x) \to \ln(2)$ quand $x \to +\infty$.

5. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet au plus une solution.
   Or,
$$f(0) = \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = 0.$$
   Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, qui est $x = 0$.

6. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\sqrt{x^2+1} + x > 0 \iff \sqrt{x^2+1} > -x.$$
   Si $x > 0$, le membre de gauche est positif et celui de droite est négatif, donc l'inégalité est vraie.
   Si $x < 0$, on peut alors passer à la fonction carrée qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et l'inégalité devient équivalente à $x^2 + 1 > x^2$, ce qui est vrai.

   (b) La fonction
$$h : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
   est bien définie sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente. De plus, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

   (c) D'après la question précédente, h est une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \\ &= \left[\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\right]_x^{2x} \\ &= \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2x + \sqrt{4x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\right). \end{aligned}$$

7. (a) Soit $x > 0$. On a $x = \displaystyle\int_x^{2x} 1\,dt$. Donc
$$\begin{aligned} x - f(x) &= \int_x^{2x} 1\,dt - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \\ \textit{Linéarité de l'intégrale} \quad &= \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1} - 1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \\ \textit{Quantité conjuguée} \quad &= \int_x^{2x} \frac{(\sqrt{t^2+1} - 1)(\sqrt{t^2+1} + 1)}{\sqrt{t^2+1}(1 + \sqrt{t^2+1})}\,dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1 + \sqrt{t^2+1})}\,dt. \end{aligned}$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Si $x = 0$, l'inégalité demandée est immédiate. Supposons désormais $x > 0$.

Pour tout $t \in [x, 2x]$, on a

$$\sqrt{t^2+1} \geq 1 \qquad \text{et} \qquad 1 + \sqrt{t^2+1} \geq 2.$$

Donc

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \leq \frac{t^2}{2}.$$

De plus, cette quantité est positive. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq x - f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_x^{2x} = \frac{1}{6}\left(8x^3 - x^3\right) = \frac{7}{6}x^3.$$

(c) Soit $x > 0$. D'après la question précédente, $0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$. En divisant par $x > 0$,

$$0 \leq 1 - \frac{f(x)}{x} \leq \frac{7}{6}x^2.$$

Comme $\frac{7}{6}x^2 \to 0$ quand $x \to 0^+$, on en déduit par encadrement que

$$\frac{f(x)}{x} \to 1 \qquad \text{quand } x \to 0^+.$$

(d) Soit $x < 0$, et posons $u = -x > 0$. Comme f est impaire,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(-u)}{-u} = \frac{-f(u)}{-u} = \frac{f(u)}{u}.$$

Or, quand $x \to 0^-$, on a $u = -x \to 0^+$. D'après la question précédente, $\frac{f(u)}{u} \to 1$. Donc

$$\frac{f(x)}{x} \to 1 \qquad \text{quand } x \to 0^-.$$

• • • • 18 Étude d'une fonction logarithmique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et $+\infty$.
2. On note Φ la fonction donnée par :
$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt.$$
   (a) Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$
   (b) En déduire les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq \Phi(x) \leq x$.
4. (a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.
   (b) Montrer : $\lim_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$. On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
5. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$. Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions usuelles, et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. Comme $x > 0$, on en déduit que

$$f'(x) < 0 \text{ sur }]0,1[, \qquad f'(1) = 0, \qquad f'(x) > 0 \text{ sur }]1,+\infty[.$$

Donc f est décroissante sur $]0,1]$, puis croissante sur $[1,+\infty[$.

De plus, par limites usuelles, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Enfin, $f(1) = 1$. Ainsi, f admet un minimum en $x = 1$, égal à 1.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{f(t)} = \dfrac{1}{t - \ln(t)}$ est continue sur $[x, 2x]$. Donc $\Phi(x)$ existe.

De plus, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Un raisonnement similaire à celui de l'exercice 8 donne

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= 2\frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \\
&= \frac{2(x - \ln(x)) - (2x - \ln(2x))}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\
&= \frac{\ln(2x) - 2\ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\
\text{Car } \ln(2x) = \ln(2) + \ln(x) &= \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.
\end{aligned}$$

(b) D'après la question 1, pour tout $x > 0$, on a $x - \ln(x) \geq 1$ et $2x - \ln(2x) \geq 1$. Donc le dénominateur de $\Phi'(x)$ est strictement positif. Le signe de $\Phi'(x)$ est donc celui de

$$\ln(2) - \ln(x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right).$$

Ainsi,

x	0		2		$+\infty$
$\ln(2) - \ln(x)$		$+$	0	$-$	
Φ		↗		↘	

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question 1, pour tout $t \in [x, 2x]$,

$$f(t) = t - \ln(t) \geq 1.$$

Donc

$$0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} 0 \leq \Phi(x) &\leq \int_x^{2x} 1\,dt \\ &= [t]_x^{2x} \\ &= x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leq \Phi(x) \leq x.$$

4. (a) D'après la question précédente, puisque $x \to 0$ quand $x \to 0^+$, on en déduit par encadrement que $\Phi(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$. Donc Φ est prolongeable par continuité en 0, avec $\Phi(0) = 0$.
   (b) Pour tout $x > 0$, en factorisant par les $\ln(x)$:

$$\Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} = \frac{\ln(x)}{\ln(x)^2} \frac{-1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)}}{\left(-1 + \frac{x}{\ln(x)}\right)\left(-1 + \frac{2x - \ln(2)}{\ln(x)}\right)} \to 0.$$

5. D'après les questions précédentes :
   - $\Phi(0) = 0$;
   - $\Phi'(0) = 0$, donc la tangente à l'origine est horizontale ;
   - Φ est croissante sur $[0, 2]$, puis décroissante sur $[2, +\infty[$;
   - $\Phi(2) \approx 1,1$;
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.

   La courbe de Φ part donc de l'origine avec une tangente horizontale d'équation

$$y = 0,$$

   puis elle croît jusqu'au point d'abscisse 2, où elle atteint un maximum voisin de $1,1$; puis elle décroît ensuite en se rapprochant de l'asymptote horizontale d'équation

$$y = \ln(2).$$

• • • • 19 Inspiré d'Ecricome 2025

Nous allons calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

avec des intégrales.

1. Soit k un entier naturel non nul. Calculer les valeurs des intégrales

$$\int_0^\pi t \cos(kt)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^\pi t^2 \cos(kt)\,dt.$$

2. En déduire deux constantes a et b (indépendantes de k) telles que

$$\int_0^\pi (at + bt^2)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}.$$

3. On pose

$$S_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

   Vérifier que

$$\int_0^\pi (at + bt^2) S_n(t)\,dt = C + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

   où C est une constante qu'on exprimera en fonction de a et de b.

4. Vérifier que, $\forall t \in]0,\pi[$, on a
$$S_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$
Que vaut $S_n(0)$?

5. Montrer que la fonction définie sur $]0,\pi]$ par
$$t \mapsto \frac{at+bt^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$
est prolongeable en 0 en une fonction continue. On admet qu'elle se prolonge comme une fonction $\mathcal{C}^1$. (on pourra utiliser si besoin que $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \cos(0) = 1$).
NB : Vous pourrez démontrer le prolongement de manière $\mathscr{C}^1$ une fois le cours sur les équivalents fait

6. Montrer que, si g est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, alors
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^\pi g(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$$
(on pourra effectuer une IPP).

7. Déduire des questions précédentes la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Correction

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose
$$I_k = \int_0^\pi t\cos(kt)\,dt \qquad \text{et} \qquad J_k = \int_0^\pi t^2\cos(kt)\,dt.$$
On pose $u : t \to t$ et $v' : t \to \cos(kt)$, donc $v : t \to \frac{\sin(kt)}{k}$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,\pi])$. Par intégration par partie :
$$\begin{aligned} I_k &= \left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kt)\,dt \\ \text{Car } \sin(\pi)=\sin(0)=0 \quad &= -\frac{1}{k}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\cos(k\pi)-1}{k^2} \\ &= \frac{(-1)^k-1}{k^2}. \end{aligned}$$
On pose maintenant $u : t \to t^2$ et $v' : t \to \cos(kt)$, donc $v : t \to \frac{\sin(kt)}{k}$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,\pi])$. Par intégration par partie :
$$J_k = \left[\frac{t^2\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi - \frac{2}{k}\int_0^\pi t\sin(kt)\,dt = -\frac{2}{k}\int_0^\pi t\sin(kt)\,dt.$$
On refait une intégration par partie avec $u : t \to t$ et $v' : t \to \sin(kt)$, donc $v : t \to -\frac{\cos(kt)}{k}$. On a donc
$$\begin{aligned} \int_0^\pi t\sin(kt)\,dt &= \left[-\frac{t\cos(kt)}{k}\right]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos(kt)\,dt \\ &= -\frac{\pi\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi \\ &= -\frac{\pi(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$
Ainsi, $J_k = -\frac{2}{k} \times \left(-\frac{\pi(-1)^k}{k}\right) = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}$.

2. D'après la question précédente, cela équivaut à

$$a\frac{(-1)^k-1}{k^2}+b\frac{2\pi(-1)^k}{k^2}=\frac{1}{k^2}\iff a\big((-1)^k-1\big)+2\pi b(-1)^k=1.$$

Si k est pair, on obtient $2\pi b=1$. Si k est impair, on obtient $-2a-2\pi b=1$. Donc $b=\frac{1}{2\pi}$ et $a=-1$.

3. On pose $P(t)=at+bt^2$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^\pi P(t)S_n(t)\,dt &= \int_0^\pi P(t)\left(1+2\sum_{k=1}^n\cos(kt)\right)dt\\ &= \int_0^\pi P(t)\,dt+2\sum_{k=1}^n\int_0^\pi P(t)\cos(kt)\,dt\\ \text{Question précédente} &= C+2\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2},\end{aligned}$$

avec $C=\displaystyle\int_0^\pi(at+bt^2)\,dt=a\frac{\pi^2}{2}+b\frac{\pi^3}{3}=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{6}=-\frac{\pi^2}{3}$.

4. Soit $t\in]0,\pi[$ fixé. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $P(n):S_n(t)=\dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

- **Initialisation.** Pour $n=0$, on a $S_0(t)=1$ et $\dfrac{\sin\left((2\times0+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=\dfrac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=1$. Donc $P(0)$ est vraie.

  Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left((2n+3)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-S_{n+1}(t) &= \frac{\sin\left((2n+3)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-(S_n(t)+2\cos((n+1)t))\\ \text{Par } P(n) &= \frac{\sin\left((2n+3)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-2\cos((n+1)t)\\ &= \frac{\sin\left((2n+3)\frac{t}{2}\right)-\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-2\cos((n+1)t)\\ &= \frac{\sin\left((n+1)t+\frac{t}{2}\right)-\sin\left((n+1)t-\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-2\cos((n+1)t).\end{aligned}$$

  Or, par les formules trigonométriques,

$$\begin{aligned}\sin\left((n+1)t+\frac{t}{2}\right)-\sin\left((n+1)t-\frac{t}{2}\right) &= \sin((n+1)t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\cos((n+1)t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\\ &\quad-\sin((n+1)t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\cos((n+1)t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\\ &= 2\cos((n+1)t)\sin\left(\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

  Donc

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left((2n+3)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-S_{n+1}(t) &= \frac{2\cos((n+1)t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-2\cos((n+1)t)\\ &= 0.\end{aligned}$$

  Donc, $P(n+1)$ est vraie.

Enfin, $S_n(0)=1+2\displaystyle\sum_{k=1}^n1=2n+1$.

5. Avec les valeurs trouvées précédemment, $at+bt^2 = -t + \dfrac{t^2}{2\pi} = t\left(-1+\dfrac{t}{2\pi}\right)$. Donc, pour $t \in]0,\pi]$,

$$\frac{at+bt^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 2\left(-1+\frac{t}{2\pi}\right)\frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Or la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est prolongeable en 0 par la valeur 1. Comme cette valeur en 0 vaut $1 \neq 0$, la fonction

$$u \mapsto \frac{u}{\sin u}$$

est elle aussi prolongeable en 0 en une fonction continue.

On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{at+bt^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est prolongeable par continuité en 0.

6. Soit $g \in \mathscr{C}^1([0,\pi])$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On pose $u : t \to g(t)$ et $v' : t \to \sin(\lambda t)$, donc $v : t \to -\dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$. Les fonctions u et v sont dans $\mathscr{C}^1([0,\pi])$, donc on peut appliquer une intégration par partie :

$$\int_0^\pi g(t)\sin(\lambda t)\,dt = \left[-\frac{g(t)\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_0^\pi + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi g'(t)\cos(\lambda t)\,dt.$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^\pi g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq \frac{|g(\pi)|+|g(0)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |g'(t)|\,dt.$$

Comme g' est continue sur $[0,\pi]$, elle est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,\pi]$, $|g'(x)| \leq M$. Ainsi,

$$\left|\int_0^\pi g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq \frac{|g(\pi)|+|g(0)|}{\lambda} + \frac{M\pi}{\lambda} \to 0.$$

7. D'après les questions 3 et 4,

$$\begin{aligned} C + 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \int_0^\pi (at+bt^2)S_n(t)\,dt \\ &= \int_0^\pi \frac{at+bt^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\,dt. \end{aligned}$$

Posons $g(t) = \dfrac{at+bt^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. D'après la question 5, g est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. En reprenant le résultat de la question 6 avec $\lambda = n+\dfrac{1}{2}$, on obtient

$$\int_0^\pi g(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\,dt \to 0.$$

Donc

$$C + 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \to 0. \iff \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \to -\frac{C}{2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

20 Une suite d'intégrales avec une exponentielle (plus guidé)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.

Il suffit de dire qu'une fonction est continue pour avoir la bonne définition d'une intégrale sur un segment. Pour la positivité, quelle propriété du cours réponds à cette question ?

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Vous pourrez étudier le signe, sur $[0,1]$, de $t^{n+1}e^{-t} - t^n e^{-t}$, puis utiliser la positivité de l'intégrale
3. En déduire que I_n converge.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq e^{-t} \leq 1$, puis en déduire cette inégalité
5. Calculer I_0.
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.
   Partir du membre de gauche, et dériver t^{n+1}.
7. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!\left(1 - e^{-1}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)$.
   Il faut faire l'hérédité en y croyant. Courage, rien de trop difficile ! (et en utilisant la question précédente pour l'hérédité, bien sûr)

Corrigé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$, donc I_n est bien définie. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, $t^n e^{-t} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{t^n}_{\geqslant 0}\underbrace{e^{-t}}_{>0}\underbrace{(t-1)}_{\leqslant 0}\,dt$.
   Par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. Donc (I_n) est décroissante.
3. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge par le théorème de la limite monotone.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [0,1]$, on a $0 < e^{-t} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant t^n e^{-t} \leqslant t^n$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Comme $\dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_n = 0$.
5. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - e^{-1}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$, donc $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties,
$$I_{n+1} = [-t^{n+1}e^{-t}]_0^1 + (n+1)\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt = (n+1)I_n - e^{-1}.$$
7. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : I_n = n!\left(1 - e^{-1}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)$.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, le membre de droite vaut $0!\left(1 - e^{-1}\dfrac{1}{0!}\right) = 1 - e^{-1} = I_0$.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. D'après la relation précédente, on a
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (n+1)I_n - e^{-1} \\ &\underset{P(n)}{=} (n+1)n!\left(1 - e^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) - \frac{e^{-1}(n+1)!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)!\left(1 - e^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)\right) \\ &= (n+1)!\left(1 - e^{-1}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\right). \end{aligned}$$
   D'où $P(n+1)$.

● ● ○ ○ 21 Une suite d'intégrales avec une exponentielle (plus dur)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Calculer I_0.
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.
6. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!\left(1 - e^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.

Corrigé

voir ci-dessus

● ● ● ○ 22 Une suite d'intégrales symétriques (plus guidé)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.
   Quelle propriété de la fonction intégrée assure l'existence de l'intégrale sur le segment $[0,1]$? Pour la positivité, étudier le signe de cette fonction sur $[0,1]$.
2. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   Pour la majoration, passez du même côté et dérivez / Étudiez le polynôme de degré 2.
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Factoriser $t^{n+1}(1-t)^{n+1} - t^n(1-t)^n$ par $t^n(1-t)^n$, puis étudier le signe de la différence.
4. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Élever l'encadrement de la question 2 à la puissance n, et ça passe !
6. Calculer I_0.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-2t)^2 t^n(1-t)^n\,dt$.
   (a) Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto t^{n+1}(1-t)^{n+1}$.
   Utiliser la formule de dérivation d'un produit, puis factoriser par $(n+1)t^n(1-t)^n$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \dfrac{2}{n+1}I_{n+1}$.
   Écrire l'intégrande comme le produit de $1-2t$ et de $(1-2t)t^n(1-t)^n$. Dériver le premier facteur et utiliser la question précédente pour trouver une primitive du second.
   (c) Vérifier que $(1-2t)^2 = 1 - 4t(1-t)$. En déduire que $J_n = I_n - 4I_{n+1}$.
   Remplacer $(1-2t)^2$ par cette expression dans J_n, puis utiliser la linéarité de l'intégrale.
   (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)}I_n$.
   Utilisez les questions précédentes, et ça devrait aller.

8. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

   On y croit !

Corrigé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n(1-t)^n$ est polynomiale, donc continue sur $[0,1]$. Ainsi, I_n est bien définie. De plus, t et $1-t$ sont positifs ou nuls sur $[0,1]$, donc $I_n \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

2. Soit $t \in [0,1]$. On a $t(1-t) \geqslant 0$. De plus, $\dfrac{1}{4} - t(1-t) = t^2 - t + \dfrac{1}{4} = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. D'où $0 \leqslant t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

   Si besoin, faire le discriminant de $t^2 - t + \dfrac{1}{4}$ donne que la seule racine est $1/2$, ce qui montre que ce polynôme vaut $\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{t^n(1-t)^n}_{\geq 0} \underbrace{\big(t(1-t)-1\big)}_{\leq 0 \text{ par la question précédente}}\, dt$.

   Par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. Donc (I_n) est décroissante.

4. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, la question 2 donne $0 \leqslant t^n(1-t)^n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4^n}\, dt = \frac{1}{4^n}$. Comme $\dfrac{1}{4^n} \longrightarrow 0$, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_n = 0$ par le théorème des gendarmes.

6. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 1\, dt = 1$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Par dérivation d'un produit,
   $$\begin{aligned}\big(t^{n+1}(1-t)^{n+1}\big)' &= (n+1)t^n(1-t)^{n+1} - (n+1)t^{n+1}(1-t)^n \\ &= (n+1)t^n(1-t)^n(1-2t).\end{aligned}$$

   (b) On pose $u(t) = 1-2t$ et $v'(t) = (1-2t)t^n(1-t)^n$. D'après la question précédente, on peut prendre $v(t) = \dfrac{t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{n+1}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Comme $v(0) = v(1) = 0$, l'intégration par parties donne
   $$J_n = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)\, dt = \frac{2}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n+1}\, dt = \frac{2}{n+1} I_{n+1}.$$

   (c) On a $(1-2t)^2 = 1 - 4t + 4t^2 = 1 - 4t(1-t)$. En remplaçant dans J_n, puis par linéarité,
   $$J_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n\, dt - 4\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n+1}\, dt = I_n - 4I_{n+1}.$$

   (d) Les deux expressions de J_n donnent $I_n = \left(4 + \dfrac{2}{n+1}\right) I_{n+1} = \dfrac{2(2n+3)}{n+1} I_{n+1}$. Donc $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)} I_n$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $\dfrac{(0!)^2}{1!} = 1 = I_0$.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. En utilisant la relation précédente, puis en multipliant numérateur et dénominateur par $n+1$ à la troisième égalité, on obtient
   $$I_{n+1} = \frac{n+1}{2(2n+3)} I_n \underset{P(n)}{=} \frac{(n+1)(n!)^2}{2(2n+3)(2n+1)!} = \frac{\big((n+1)!\big)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \frac{\big((n+1)!\big)^2}{(2n+3)!}.$$
   D'où $P(n+1)$.

● ● ● ○ 23 Une suite d'intégrales symétriques (plus dur)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.
2. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Calculer I_0.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-2t)^2 t^n(1-t)^n\,dt$.
   (a) Dériver $t \to t^{n+1}(1-t)^{n+1}$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \dfrac{2}{n+1} I_{n+1}$.
   On partira de J_n, que l'on écrira comme $(1-2t) \times (1-2t)t^n(1-t)^n$
   (c) En développant $(1-2t)^2$, montrer que $J_n = I_n - 4I_{n+1}$.
   (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)} I_n$.
7. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Corrigé

Voir ci-dessus.

● ● ○ ○ 24 Une suite d'intégrales avec un logarithme (plus guidé)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t)\big)^n\,dt$. On convient que $\big(\ln(1+t)\big)^0 = 1$ pour tout $t \in [0,1]$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.
   Justifier la continuité de la fonction intégrée sur $[0,1]$, puis étudier son signe sur cet intervalle.
2. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln 2 < 1$.
   Utiliser la croissance de la fonction logarithme, ainsi que l'inégalité $2 < e$.
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Si on fait $I_{n+1} - I_n$ et qu'on factorise dans l'intégrande, ça devrait bien se passer.
4. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant (\ln 2)^n$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Élever l'encadrement de la question 2 à la puissance n, puis intégrer sur $[0,1]$.
6. Calculer I_0.
7. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n$.
   Partir de I_{n+1}, dériver $\big(\ln(1+t)\big)^{n+1}$ et utiliser $t \mapsto 1+t$ comme primitive de la fonction constante égale à 1. Le facteur $1+t$ permettra une simplification.
8. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (-1)^n n! \left(2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ln 2)^k}{k!} - 1\right)$.
   Croyez-y ! Et prenez votre temps !

Corrigé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto (\ln(1+t))^n$ est continue sur $[0,1]$, donc I_n est bien définie. Pour $t \in [0,1]$, on a $1+t \geqslant 1$, donc $\ln(1+t) \geqslant 0$. La fonction intégrée est positive ou nulle, donc $I_n \geqslant 0$.
2. Soit $t \in [0,1]$. On a $1 \leqslant 1+t \leqslant 2 < e$. Par stricte croissance du logarithme, $0 = \ln(1) \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln(2) < \ln(e) = 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{(\ln(1+t))^n}_{\geqslant 0} \underbrace{\big(\ln(1+t) - 1\big)}_{\leqslant 0 \text{ par la question précédente}} dt$.
   Par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. Donc (I_n) est décroissante.
4. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.
5. Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant (\ln(1+t))^n \leqslant (\ln 2)^n$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 (\ln 2)^n \, dt = (\ln 2)^n$. Or $0 < \ln 2 < 1$, donc $(\ln 2)^n \longrightarrow 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n = 0$ par le théorème des gendarmes.
6. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 1 \, dt = 1$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u(t) = (\ln(1+t))^{n+1}$ et $v'(t) = 1$. On choisit $v(t) = 1+t$ pour simplifier le dénominateur de $u'(t) = (n+1)\dfrac{(\ln(1+t))^n}{1+t}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties,
$$I_{n+1} = \big[(1+t)(\ln(1+t))^{n+1}\big]_0^1 - (n+1)\int_0^1 (1+t)\frac{(\ln(1+t))^n}{1+t}\,dt = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n.$$
8. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : I_n = (-1)^n n! \left(2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ln 2)^k}{k!} - 1\right)$.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, le membre de droite vaut $2 \times 1 - 1 = 1 = I_0$.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. D'après la relation précédente, on a
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n \\ &\underset{P(n)}{=} 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)(-1)^n n! \left(2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ln 2)^k}{k!} - 1\right) \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)! \left(2\frac{(-\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ln 2)^k}{k!} - 1\right) \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)! \left(2\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-\ln 2)^k}{k!} - 1\right). \end{aligned}$$
     D'où $P(n+1)$.

● ● ● ○ 25 Une suite d'intégrales avec un logarithme

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t)\big)^n \, dt$. On convient que $\big(\ln(1+t)\big)^0 = 1$ pour tout $t \in [0,1]$.

1. Justifier que I_n est bien définie et que $I_n \geqslant 0$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant (\ln 2)^n$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Calculer I_0.
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n$.
   On pourra utiliser la fonction $t \mapsto 1+t$ comme primitive de la fonction constante égale à 1.
6. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (-1)^n n! \left(2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ln 2)^k}{k!} - 1\right)$.

Corrigé

Voir ci-dessus.