Exercice 1. *Équation paramétrée.*

Partie A : Étude d'une fonction.
On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = xe^x$

1. Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$ en y indiquant $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Justifier que la fonction f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers un intervalle à préciser.
4. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1}.

Partie B : Étude d'une suite implicite.
À présent, on considère l'équation (E_n) : $xe^x = n$ d'inconnue $x \in [0;+\infty[$, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé.

5. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) possède une unique solution dans $[0;+\infty[$.

Cette solution sera notée u_n, et on étudie désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée par ces solutions.

6. Résoudre l'équation (E_0) et en déduire la valeur de u_0.
7. Justifier que $u_n = f^{-1}(n)$, où f^{-1} est la bijection réciproque déterminée à la partie A.
8. En déduire le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. *Étude de la convergence d'une série.*

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$

1. Calculer S_1, S_2 et vérifier que $S_3 = \dfrac{2}{3}$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer par récurrence $\forall k \geq 2, \quad 2^k \geq k-1$
4. En déduire que $\forall k \geq 2, \quad \dfrac{1}{k2^k} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$
5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{n}$
6. Justifier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
7. Compléter l'algorithme Python suivant afin qu'il calcule la somme S_n.

```
def somme(n):
    S = ...
    for ...
        S = ...
    return(S)
```

Exercice 3. *Étude d'une suite homographique.*

L'objectif de cet exercice est d'étudier la convergence d'une suite.
Les parties A et B sont fortement liées, mais la partie C est indépendante de ces parties.

Partie A : Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en justifiant soigneusement vos calculs.
2. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.
3. Dresser le tableau de variations de f, en précisant $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ dans ce tableau.

Partie B : Étude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$

4. Démontrer, pour tout entier naturel n, que $u_n \in [0, 1]$.
5. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite à l'aide de la méthode du point fixe.
7. Compléter l'algorithme Python suivant afin qu'il renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n):
    u=
    for ...
        u=
    return u
```

Partie C : Approche matricielle.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice identité d'ordre 2 sera notée I_2, de sorte que $A = I_2 + J$.

8. (a) Calculer les matrices J^2, $A \times J$ et $J \times A$.
   (b) Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la relation suivante : $A^n = I_2 + \dfrac{1}{2}(3^n - 1)J$
   On rappelle que $A^0 = I_2$.
   (c) Donner l'expression de A^n sous forme matricielle.
9. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $p_0 = 1, q_0 = 2$ et pour tout entier n, $\begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$

   On considère également, pour tout entier n, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

   (a) Que vaut X_0 ?
   (b) Établir que pour tout entier naturel n on a $X_n = A^n X_0$.
   (c) En déduire l'expression de X_n en fonction de n.
   Donner également les expressions de p_n et q_n en fonction de n.
10. (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.
    (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n, et retrouver la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 - Proba

La lettre c désigne un entier naturel fixé. Une urne contient initialement des boules blanches et des boules rouges, toutes indiscernables au toucher. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, c boules de la couleur qui vient d'être tirée.

1. Simulation Python : dans cette question uniquement, on suppose que $c = 0$. On suppose également que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges.

   (a) Compléter la fonction Python suivante, qui permet de simuler un tirage de l'expérience considérée en renvoyant 1 si la boule tirée est blanche et 0 si la boule tirée est rouge.

   ```
   import numpy as np
   import numpy.random as rd

   def TirageUnique(b,r):
       a = rd.randint(......)
       if ... :
           return 1
       else:
           return 0
   ```

   (b) En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction Python d'en-tête `Tirages(b,r,n)` qui renvoie un tableau de 1 ligne et n colonnes simulant n tirages : la case i contient un 1 si le i-ème tirage a donné une boule blanche et un 0 sinon.

2. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges, où b, r sont des entiers naturels non nuls. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i : "on tire une boule blanche au i-ème tirage" et R_i : "on tire une boule rouge au i-ème tirage".

   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage ?

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage ? On donnera une réponse simplifiée au maximum.

   (c) Si la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

3. Pour tous entiers naturels non nuls n, x, y, on note $u_n(x, y)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage, lorsque l'urne contient initialement x boules blanches et y boules rouges.

   (a) Montrer, en utilisant un système complet d'événements associé au premier tirage, que, pour tous entiers naturels non nuls n, x, y, on a :

   $$u_{n+1}(x, y) = u_n(x + c, y)\frac{x}{x + y} + u_n(x, y + c)\frac{y}{x + y}.$$

   (b) En déduire, par récurrence, que, pour tous entiers naturels non nuls n, x, y, on a :

   $$u_n(x, y) = \frac{x}{x + y}.$$

4. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge et que $c = 1$. Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

   (a) Donner la loi de X_1.

   (b) Donner la loi de X_2.

   (c) Montrer par récurrence que X_n suit une loi uniforme dont on donnera l'espérance et la variance.