

# Problème : Intégrales généralisées

## Préliminaire

1. Exprimer, pour tout réel  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ ,  $1 + \frac{1}{\tan^2 t}$  en fonction uniquement de  $\sin^2 t$ .

## Partie I

2. Pour tout réel  $x$ , on pose :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+t^2} dt$$

- (a) Montrer que pour tout réel  $x$  l'intégrale  $F(x)$  converge.
- (b) Que vaut  $F(0)$  ?
- (c) Exprimer, pour tout réel  $x$ ,  $F(x)$  en fonction de  $x$ .

*Indication : on pourra poser le changement de variable  $t = u\sqrt{x^2+1}$*

3. Soit  $\alpha$  un réel positif. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :

$$u_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}}, \quad I_n = \int_0^\pi \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t}, \quad J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$$

- (a) Donner un équivalent de  $u_n$  en  $+\infty$  en fonction de  $\alpha$ .
- (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel  $\alpha$  pour que la série  $\sum u_n$  converge.
- (c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$  :  $I_{n+1} \leq J_n \leq I_n$ .

*Indication : on pourra poser le changement de variable  $u = t - n\pi$  dans  $J_n$ , puis encadrer judicieusement le dénominateur.*

- (d) On souhaite démontrer, à l'aide du changement de variable  $u = \frac{1}{\tan(t)}$  que, pour tout entier naturel non nul  $n$  :

$$I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

On procédera en plusieurs points :

- i. En remarquant que  $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} + \int_{\pi/2}^\pi \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t}$ , et en posant le changement de variable  $t = \pi - u$  dans la seconde intégrale, démontrer que

$$I_n = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t}.$$

- ii. On pose maintenant  $u = \frac{1}{\tan(t)}$ . Démontrer que  $du = -\frac{1}{\sin^2(t)} dt$ . Etudier aussi les bornes de ce changement de variable.

- iii. On pose  $\phi : ]0, \pi/2[ \rightarrow ]0, +\infty[$ ,  $t \rightarrow \frac{1}{\tan(t)}$ . Démontrer que  $\phi$  est strictement monotone

*Le changement de variable est donc licite*

- iv. C'est le moment ! On peut donc effectuer le changement de variable. Allez-y, et démontrez que

$$I_n = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha + t^2}.$$

*On pourra factoriser le dénominateur de  $I_n$  par  $\sin^2(t)$  pour faire apparaître ce qui deviendra le  $du$ , et on utilisera la question du Préliminaire.*

- v. Conclusion.

- (e) En déduire, pour tout entier naturel non nul  $n$  :  $u_{n+1} \leq J_n \leq u_n$ .
- (f) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel  $\alpha$  pour que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$$

converge.

## Partie II

4. Pour tout entier naturel non nul,  $n$ , on pose :

$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du.$$

(a) Étudier, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la convergence de l'intégrale  $H_n$ .

(b) Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u^{2n} du$ .

(c) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du = 0$ .

(d) Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du$ .

(e) En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$ .

5. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , et tout réel strictement positif  $x$ , on rappelle la notation :

$$\sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}.$$

On pose :

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\tan x} dx, \quad , \quad L_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x} dx$$

(a) Étudier, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la convergence des intégrales  $K_n$  et  $L_n$ .

*Pour  $L_n$ , on pourra poser  $x = \pi/2 - u$ .*

(b) Montrer que la suite  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et majorée.

(c) Étudier le sens de variation de la suite  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

(d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$  :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x} dx \geq \frac{\pi}{4}$$

(e) En déduire la convergence de la suite  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , et montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n + L_n) \geq \frac{\pi}{4}$$

6. (a) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , effectuer, en le justifiant, le changement de variable  $\tan x = u^{2n}$  dans l'intégrale  $(K_n + L_n)$ , puis donner, pour tout entier naturel non nul, une relation entre  $(K_n + L_n)$  et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du$$

(b) En déduire l'existence d'une constante réelle  $H$  telle que, lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$H_n \sim \frac{H}{n}$$