Mathématiques

Corrigé du concours blanc

Exercice 1.

Partie A : Etude d'une fonction

1. $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $x \mapsto |x|$ est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, ainsi $|2-e^x| > 0$ si et seulement $2 - e^x \neq 0$ ainsi
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}.$$

2. (a) On a $\lim\limits_{x\to\ln(2)} |2-e^x| = 0^+$ ainsi
$$\lim_{x\to\ln(2)} f(x) = -\infty.$$
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} |2-e^x| = +\infty$ ainsi
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} |2-e^x| = 2$ ainsi
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2).$$

(b) D'après la question précédente, la droite d'équation $x = \ln(2)$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f. De même, la droite d'équation $y = \ln(2)$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$. Pour $x > \ln(2)$, on a
$$f(x) = \ln(e^x - 2) = x + \ln\left(1 - 2\,e^{-x}\right).$$
Ainsi
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(1-2\,e^{-x}\right)}{x} = 1.$$
De plus,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1-2\,e^{-x}\right) = 0.$$
Donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

3. (a) f est dérivable sur D_f en tant que composée de fonctions dérivables ; en effet, $x \mapsto |2-e^x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\ln(2)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Rappelons que $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$. Soit $x \in D_f$,
$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}.$$

(b) Pour $x \in D_f$, on a $e^x > 0$. De plus, $e^x - 2 > 0$ si et seulement si $x > \ln(2)$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(2)[$ et strictement croissante sur $]\ln(2), +\infty[$.

Partie B : Etude de séries

1. La fonction $g : x \to \ln(2-e^x)$ admet pour domaine de définition l'intervalle $I =]-\infty, \ln 2[$. g est de classe C^∞ sur I en tant que composée de fonctions C^∞. De plus, pour $x \in I$
$$g'(x) = \frac{-e^x}{2-e^x} = 1 - \frac{2}{2-e^x} \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{-2\,e^x}{(2-e^x)^2}.$$
Alors,
$$g(0) = 0; \quad g'(0) = -1 \quad \text{et} \quad g''(0) = -2.$$
D'après la formule de Taylor-Young avec g de classe C^∞ au voisinage de 0,
$$\ln(2-e^x) \underset{0}{=} -x - x^2 + o(x^2).$$

2. (a) Soit k un entier supérieur à 2. $\dfrac{1}{k}$ appartient alors à l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, donc $e^{1/k}$ appartient à $\left]1, e^{1/2}\right]$. $2 - e^{1/k}$ appartient alors à l'intervalle $\left[2 - e^{1/2}, 1\right[$. Observons que $e < 4$ donc $e^{1/2} < 2$ et ainsi $2 - e^{1/2} > 0$. Alors $2 - e^{1/k}$ est bien dans l'intervalle $]0, 1[$.

(b) $\forall x \in]0,1[,\ \ln(x) < 0$. Ce qui précède donne alors : pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$\ln\left(2 - e^{1/k}\right) < 0$$

(c) Au voisinage de 0 : $\ln(2-e^x) \underset{0}{=} -x - x^2 + o(x^2)$. Ainsi $\ln(2-e^x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$. Alors

$$-\ln(2-e^{1/k}) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{k} \geq 0$, la série de terme général $\dfrac{1}{k}$ est une série de Riemann divergente. Les critères de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $-\ln(2-e^{1/k})$ diverge ; il en est de même pour la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$.

(d) La série de terme général $-\ln(2-e^{1/k})$ est à termes positifs et divergente donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ (suite des sommes partielles croissante et divergente).

Par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty}(-V_n) = +\infty$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} V_n = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} e^{V_n} = 0.$$

3. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] &= V_n - \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\\
&= V_n - \sum_{k=2}^{n}\big(\ln(k-1) - \ln k\big)\\
&= V_n - \big(\ln 1 - \ln n\big)\\
&= \ln\left(e^{V_n}\right) + \ln n\\
&= \ln\left(e^{V_n}\, n\right)\\
&= \ln(n\, u_n).
\end{aligned}$$

On en conclut que $\forall n \geq 2$,

$$\ln(n\,u_n) = \sum_{k=2}^{n}\left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-1/k)\right]$$

(b) Au voisinage de 0 :

$$\ln(2-e^x) \underset{0}{=} -x - x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad \ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi, au voisinage de 0,

$$\ln(2-e^x) - \ln(1-x) \underset{0}{=} -x - x^2 - \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Alors

$$\ln(2-e^x) - \ln(1-x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Ainsi

$$\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,k^2}$$

(c) Posons $\forall k \geq 2,\ w_k = \ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$. On a

$$-w_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,k^2}$$

De plus, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2\,k^2} \geq 0$, la série de terme général $\dfrac{1}{2\,k^2}$ est une série de Riemann convergente. Les critères de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $-w_k$ converge ; ainsi la série de terme général w_k converge. Notons L la somme de la série.

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} w_k = \lim_{n\to\infty}\big(\ln(n\,u_n)\big).$$

Alors par continuité de la fonction $t \to e^t$ en L

$$\lim_{n\to\infty} (n\,u_n) = e^L.$$

La suite $(n\,u_n)$ converge et sa limite e^L est non nulle donc : $n\,u_n \underset{+\infty}{\sim} e^L$. Ceci donne encore

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^L}{n}$$

Posons $K = e^L$. K est un réel strictement positif et

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{K}{n}$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{K}{n} \geq 0$; la série de terme général $\dfrac{K}{n}$ diverge. Les critères de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n diverge.

4. (a) $\forall n \geq 2,\ V_{n+1} - V_n = \ln(2 - e^{1/n+1}) < 0$ d'après **2. b.**. La suite $(V_n)_{n\geq 2}$ est donc strictement décroissante. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, la suite $(e^{V_n})_{n\geq 2}$ est strictement décroissante. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

   (b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

$$S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}\,u_{2n+1} + (-1)^{2n+2}\,u_{2n+2} = -u_{2n+1} + u_{2n+2} < 0.$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2}\,u_{2n+2} + (-1)^{2n+3}\,u_{2n+3} = u_{2n+2} - u_{2n+3} > 0$$

Ainsi la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante et la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante.

De plus, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{K}{n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} \left((-1)^{2n+1}\,u_{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} (-u_{2n+1}) = 0.$$

Ainsi les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

   (c) Les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont alors convergentes et ont même limite. Ce qui permet d'affirmer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Par conséquent, la série de terme général $(-1)^n\,u_n$ est convergente.

Exercice 2.

Partie A : Etude d'une suite de nombres

1. Connaissant les propriétés des coefficients binomiaux, on a

$$c_0 = \frac{1}{1}\binom{0}{0} = 1, \quad c_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = 1 \text{ et } c_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{4\times 3}{3\times 2} = 2.$$

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque $n \leqslant 2n$ et $n+1 \leqslant 2n$, donc on peut utiliser les expressions avec les factorielles de sorte que

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{1}{n+1} \\
&= c_n
\end{aligned}$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ donc c_n est un nombre strictement positif.

   Comme $c_n = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1}$, on voit que c_n est une différence de deux entiers donc c_n est un entier. Finalement, c_n est un entier naturel non nul.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+2}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{n+2} \times \frac{(2n+2)\times(2n+1)\times(2n)!}{(n+1)^2(n!)(n!)}$$
$$= \frac{1}{n+2} \times \frac{2(n+1)}{n+1} \times (2n+1) \times \left(\frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{(n!)(n!)}\right) = \frac{2(2n+1)}{n+2}c_n.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} - c_n = \frac{2(2n+1)}{n+2}c_n - c_n = c_n\left(\frac{2(2n+1)}{n+2} - 1\right) = c_n\left(\frac{2(2n+1)-(n+2)}{n+2}\right) = \frac{3n}{n+2}c_n \geqslant 0.$$

Donc la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Donc soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge soit elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers une limite réelle que l'on note ℓ.

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}c_n = \frac{4n+2}{n+2}c_n = 4 \times \frac{n+\frac{1}{2}}{n+2}c_n = 4 \times \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{2}{n}}c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4\ell.$$

Or $c_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, par unicité de la limite, on a $4\ell = \ell$ donc $3\ell = 0$ et $\ell = 0$. Cela contredit le fait que $0 < c_0 = 1$ et que la suite soit croissante. Donc $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger donc elle diverge vers $+\infty$.

4. On propose

```
def catalan(n) :
    c=1
    for k in range(n) :
        c=(4*k+2)/(k+2)*c
    return(c)
```

5. On revient à la définition de c_n ainsi pour $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

D'après la formule de Stirling, on a $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Ainsi

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}\frac{\sqrt{4\pi\, n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi\, n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi\, n}(n+1)}.$$

Comme $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on conclut que

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}.$$

Partie B : Une expérience aléatoire

1. (a) Le nombre de piles plus le nombre de faces est égal au nombre total de lancers. Donc le nombre de piles est égal au nombre de faces uniquement sur des rangs de lancers pairs. S'il n'y a jamais cet évènement, T vaut 0 et reste pair. Donc T ne peut pas être impair.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k : "le k ème lancer donne pile" et F_k : "'le k ème lancer donne face". Ainsi

$$[T=2] = (P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2).$$

Par indépendance des événements et par union disjointe on a :

$$\mathbb{P}(T=2) = \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(P_2) = 2pq.$$

On écrit également :

$$[T=4] = (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).$$

Par indépendance des événements et par union disjointe on a :

$$\mathbb{P}(T=4) = 2p^2q^2.$$

2. (a) X compte le nombre de succès en $2n-2$ expériences de Bernoulli identiques et indépendantes ayant une probabilité de succès p. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $2n-2$ et p.

(b) D'après la question précédente, on a donc pour $k \in [\![0, 2n-2]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{2n-2}{k} p^k q^{2n-2-k}.$$

Comme $n \geq 2$, alors $n-1 \leq 2n-2$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X=n-1) = \binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} q^{n-1}.$$

3. (a) $\{S, \overline{S}\}$ est un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}\left(X=n-1\right) = \mathbb{P}\left([X=n-1] \cap S\right) + \mathbb{P}\left([X=n-1] \cap \overline{S}\right).$$

Ainsi d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([X=n-1] \cap S\right) &= \mathbb{P}\left(X=n-1\right) - \mathbb{P}\left([X=n-1] \cap \overline{S}\right) \\
&= \left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right) p^{n-1} q^{n-1} \\
&= \left(\binom{2(n-1)}{n-1} - \binom{2(n-1)}{(n-1)+1}\right) p^{n-1} q^{n-1}.
\end{aligned}$$

On conclut avec la question A.2)a)

$$\mathbb{P}\left([X=n-1] \cap S\right) = c_{n-1} p^{n-1} q^{n-1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\{P_1, F_1\}$ est un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales

$$P(T=2n) = P([T=2n] \cap P_1) + P([T=2n] \cap F_1).$$

L'évènement $[T=2n] \cap P_1$ est tel que le premier lancer est pile et le premier lancer donnant l'égalité du nombre de piles et de faces est $2n$. Ainsi entre le 2ème et le (2n-1)ème lancer, le nombre de piles est toujours supérieur au nombre de faces. Puis le (2n)ème lancer donne un face afin d'avoir l'égalité entre le nombre de piles et de faces, ainsi

$$[T=2n] \cap P_1 = P_1 \cap [X=n-1] \cap S \cap F_{2n}.$$

Par indépendance et d'après la question précédente.

$$P([T=2n] \cap P_1) = c_{n-1} p^n q^n.$$

Pour l'évènement $[T=2n] \cap F_1$, les rôles de pile et de face sont inversés. La probabilité reste la même avec un face au premier lancer et un pile au (2n)ème lancer.

$$P([T=2n] \cap F_1) = c_{n-1} p^n q^n.$$

Ainsi $P(T=2n) = 2c_{n-1} p^n (1-p)^n$.

4. (a) La fonction $u : x \mapsto x(1-x)$ est polynomiale donc dérivable et $u'(x) = 1-2x$ donc $u' > 0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $u' < 0$ sur $]\frac{1}{2}, 0]$ donc u admet son maximum en $\frac{1}{2}$. Par la stricte monotonie sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, 0]$, ce maximum $u(1/2) = 1/4$ est atteint une seule fois et c'est en $\frac{1}{2}$.

(b) La variable T est discrète de support $T(\Omega) = 2\mathbb{N}$ donc elle a une espérance si et seulement si $\sum_{n\geq 0} 2nP(T=2n)$ converge absolument. Elle est à terme général positif donc on étudie sa convergence. Avec la question 3)b), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$2nP(T=2n) = 4nc_{n-1} p^n (1-p)^n$$

et d'après la question A)5)

$$2nP(T=2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

— Si $p = \dfrac{1}{2}$ alors

$$2nP(T=2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Or la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge donc d'après le critère de comparaison par équivalence $\sum_{n\geq 0} 2nP(T=2n)$ diverge.

— Si $p \neq \dfrac{1}{2}$ alors $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$ donc $-1 < 4p(1-p) < 1$ donc par croissances comparées, on a

$$n^2 \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n}} = n^{3/2}(4p(1-p))^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$\frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n}} = o\left(1/n^2\right).$$

La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge avec un terme général positif donc par critère de comparaison par équivalence la série $\sum\limits_{n\geq 0} 2nP(T=2n)$ converge. Donc T a une espérance.

5. (a) p prendra comme valeur $1/4$ et $1/2$.
   (b) Il faudra taper la commande *rd.random*.
   (c) Tant que le nombre de faces est différent de la moitié des lancers effectués, on continue.
   (d) Si $p = 0.5$, on remarque que seulement une dizaine de cas sur 1000 tests n'auront pas un nombre de faces et de piles qui coïncideraient à un moment.
   Si $p = 0.25$ $\mathbb{P}(T = 0)$ semble plausible car dans environ la moitié des tests effectués (500 pour 1000 tests), le nombre de faces et de piles ne coïncident jamais. Dans les cas où le nombres de faces et de piles coïncident, on obtient respectivement 1460 et 1590 lancers cumulés effectués, ainsi en divisant par les 1000 tests, on obtient une moyenne d'environ 3/2.

Exercice 3.

Partie A : Quelques résultats théoriques

1. On a $\dim\left(L(E,\mathbb{R})\right) = \dim E \times \underbrace{\dim \mathbb{R}}_{=1} = \dim E = d$.
2. (a) $\mathrm{Im}f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ donc est de dimension 0 ou 1.
   Raisonnons par l'absurde. On suppose que $\dim(\mathrm{Im}f) = 0$ alors $\mathrm{Im}f = \{0\}$ et donc f est l'application nulle. Ce qui est absurde car f n'est pas l'application nulle. Donc $\mathrm{Im}f \subset \mathbb{R}$ et $\dim(\mathrm{Im}f) = 1 = \dim \mathbb{R}$, donc $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}$, ce qui signifie que f est surjective.
   (b) Le théorème du rang affirme que
   $$\dim E = \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}f\right).$$
   D'après la question précédente, on a $\dim(\mathrm{Im}f) = 1$ de sorte que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = d-1$.
3. (a) $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$, ainsi la dimension de $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$ est au moins $d-1$. De plus comme $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}g$ est un sous-espace vectoriel de E alors $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$ est de dimension $d-1$ ou d. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$ est de dimension $d-1$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$ de même dimension, alors
   $$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g).$$
   De même,
   $$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g).$$
   Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, ce qui contredit l'hypothèse $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Ker}(g)$. On en conclut que $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$ est un sous-espace vectoriel de E de même dimension, donc
   $$\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g) = E.$$
   (b) D'après la formule de Grassmann, on obtient
   $$\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right)+\dim\left(\mathrm{Ker}(g)\right)-\dim\left(\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)\right) = (d-1)+(d-1)-d = d-2.$$
4. (a) Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ...e_{d-1})$ une base de H, alors comme $x \in E \setminus H$, alors x ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{B}$. Ainsi la famille $(e_1, e_2, ...e_{d-1}, x)$ est une famille libre. Comme son cardinal est d, elle constitue donc une base de E. Par concaténation de bases, on obtient
   $$E = H \oplus Vect(x).$$
   (b) On définit la forme linéaire f sur E par l'image de la base $(e_1, e_2, ...e_{d-1}, x)$ de la manière suivante
   $$\forall i \in [\![1, d-1]\!],\ f(e_i) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 1.$$
   Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = H$.

Partie B : Deux exemples simples

1. (a) On obtient facilement

$$H = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\5\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad K = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\6\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Les familles génératrices obtenues sont des bases en tant que familles échelonnées.

(b) On obtient après résolution de système linéaire

$$H \cap K = Vect\left(\begin{pmatrix}7\\-8\\-10\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-11\\2\\7\end{pmatrix}\right).$$

La famille génératrice obtenue est une base de $H \cap K$ car les vecteurs obtenues ne sont pas colinéaires.

2. (a) Pour tout $P \in E$ on a $g(P) \in \mathbb{R}$ et l'application g est linéaire par linéarité de l'intégration.

(b) Soit $i \in [\![1, k]\!]$. On a :

$$g(Q_i) = \int_0^1 Q_i(t)\, dt = \left\{\frac{x^{i+1}}{i+1} - \frac{x}{i+1}\right]_0^1 = 0.$$

Ainsi $Q_i \in \operatorname{Ker}(g)$.

Comme les éléments de la famille $(Q_1, \ldots, Q_k)$ sont de degrés tous différents, c'est une famille libre de k vecteurs de $\operatorname{Ker}(g)$ qui est de dimension k : c'est donc une base de $\operatorname{Ker}(g)$.

Partie C : Représentation des formes linéaires

1. (a) Soient P_1, P_2 dans $\mathbb{R}_k[X]$ et λ et μ dans $\mathbb{R}$. Pour tout Q dans $\mathbb{R}_k[X]$ on a par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P_1 + \mu P_2)(Q) &= \int_0^1 (\lambda P_1 + \mu P_2)(t) Q(t)\, dt \\ &= \lambda \int_0^1 P_1(t)Q(t)\, dt + \mu \int_0^1 P_2(t) Q(t)\, dt \\ &= \lambda\Phi(P_1)(Q) + \mu\Phi(P_2)(Q)\end{aligned}$$

Ceci étant valable quelque soit le choix de Q dans $\mathbb{R}_k[X]$, il vient : $\Phi(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda\Phi(P_1) + \mu\Phi(P_2)$.

(b) Soit $P \in \operatorname{Ker}\Phi$, alors $\Phi(P)$ est l'application nulle. Donc pour tout $Q \in \mathbb{R}_k[X]$, $\Phi(P)(Q) = 0$. En particulier si $Q = P$, on obtient

$$\Phi(P)(P) = \int_0^1 (P(t))^2\, dt = 0.$$

Or P^2 est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$, donc P est le polynôme nul. Ainsi $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0\}$, Φ est injective de $\mathbb{R}_k[X]$ dans $L(\mathbb{R}_k[X], \mathbb{R})$.

(c) L'application linéaire Φ est injective de $\mathbb{R}_k[X]$ dans $L(\mathbb{R}_k[X], \mathbb{R})$ qui sont des espaces vectoriels de même dimension : Φ est bijective (par le théorème du rang). On conclut que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ sur $L(\mathbb{R}_k[X], \mathbb{R})$.

(d) Comme Φ est une application bijective de $\mathbb{R}_k[X]$ dans $L(\mathbb{R}_k[X], \mathbb{R})$, pour tout $\varphi \in L(\mathbb{R}_k[X], \mathbb{R})$ il existe un unique $A \in \mathbb{R}_k[X]$ tel que $\Phi(A) = \varphi$. On définit $\varphi \in L(\mathbb{R}_k[X], \mathbb{R})$ par $\forall Q \in \mathbb{R}_k[X]$

$$\varphi(Q) = Q(0).$$

Ainsi $\forall Q \in \mathbb{R}_k[X]$, on a

$$\Phi(A)(Q) = Q(0).$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 A(t)Q(t)\, dt = Q(0)$.

2. (a) B est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$, donc d'après le théorème des bornes, B est bornée sur $[0, 1]$.

(b) De plus, d'après l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_0^1 B(t)\sqrt{n}\,(1-t)^n\, dt\right| \leq \int_0^1 |B(t)|\,\sqrt{n}\,(1-t)^n\, dt.$$

Comme B est bornée sur $[0, 1]$, il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall t \in [0, 1], |B(t)| \leq M.$$

Ainsi

$$\int_0^1 |B(t)|\sqrt{n}(1-t)^n dt \leq M\sqrt{n}\int_0^1 (1-t)^n dt.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$, ainsi

$$\left|\int_0^1 B(t)\sqrt{n}\,(1-t)^n\,dt\right| \leq M\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$. donc par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 B(t)\sqrt{n}\,(1-t)^n\,dt = 0.$$

(c) Raisonnons par l'absurde. On suppose que le polynôme B existe et vérifie l'hypothèse de la question 2. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ la suite de polynômes P_n tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_n(t) = \sqrt{n}\,(1-t)^n\,.$$

Ainsi d'après l'hypothèse de la question 2

$$P_n(0) = \int_0^1 B(t)P_n(t)\,dt.$$

Donc

$$\sqrt{n} = \int_0^1 B(t)\sqrt{n}\,(1-t)^n\,dt.$$

Or d'après la question précédente

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 B(t)\sqrt{n}\,(1-t)^n\,dt = 0.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$, on obtient une contradiction. Ainsi le polynôme B n'existe pas.