

Ce chapitre présente le vocabulaire mathématique pour raisonner, ainsi que différents types de raisonnements. Nous appliquerons ces exemples de raisonnements aux fonctions. CE QUE JE VEUX FAIRE : ALTERNER RAPPELS DE TERMINALES ET ETUDIER LES FONCTIONS.

RAPPEL SUR LES ENSEMBLES DE BASE

RAPPEL SUR APPARTENIR ET INCLUSION

Dans les fonctions : Ensemble de définition, donner des exemples. Image, antécédent, graphe.

Opération sur les fonctions : somme, produit, quotient, composition. Parité, imparité, périodicité.

Croissance, décroissance, RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSEE / RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE.

1 Généralités sur les fonctions

Définition: Fonction

Une *fonction* est une relation qui, à chaque élément d'un ensemble appelé *ensemble de départ*, associe au plus un élément d'un autre ensemble appelé *ensemble d'arrivée*.

Remarque : souvent, l'ensemble de départ est continu. Lorsque l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$, on parle de suite.

Définition: Ensemble de définition

L'*ensemble de définition* d'une fonction est l'ensemble des réels pour lesquels l'expression de la fonction a un sens. On le note souvent D_f .

Exemple. 1. La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Définition: Image et antécédent

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f .

- Pour tout $x \in D_f$, le réel $f(x)$ est appelé *l'image* de x par f .
- Inversement, si $f(x) = y$, on dit que x est un *antécédent* de y par f .

Exemple. Soit $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

- L'image de 2 par f est 4 : $f(2) = 4$.
- 2 et -2 sont deux antécédents de 4 par f , car $f(2) = f(-2) = 4$.

Définition: Graphe d'une fonction

Le *graphe* d'une fonction f est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, pour $x \in D_f$. Il représente la courbe de la fonction dans un repère.

1.1 Petit tour par les quantificateurs ; premières notions sur les ensembles

Définition: Quantificateurs

En mathématiques, on utilise deux quantificateurs : $\forall$ et $\exists$. Le premier signifie "pour tout", et le second "il existe".

Remarque:

ATTENTION : lorsque l'on écrit une phrase avec des mots en français, on n'utilise JAMAIS les quantificateurs, mais on écrira en toute lettre "il existe" ou "pour tout".

Définition: Symbole d'appartenance ; ensemble

Nous verrons plus tard un peu de la théorie des ensembles. En attendant, un ensemble est une collection d'objets (des suites ; des fonctions ; des nombres ; etc...). Pour I un ensemble, on note $x \in I$ pour dire que x est un élément de I .

Remarque: Ensembles classiques

- Le symbole $\in$ est peut être utilisé dans une phrase avec des mots en français.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des fractions : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- On retirera l'élément 0 d'un ensemble en ajoutant l'exposant $*$: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$; $\mathbb{Q}^* = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{Z}^*\}$; et $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nuls.

Définition: Premières opérations sur les ensembles

Il existe différentes opérations sur les ensembles. Nous allons en voir deux : Soit I un ensemble de réels, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$I + x = \{a + x : a \in I\}$$

$I + x$ est l'ensemble des réels de I auxquels on ajoute x .

$$yI = \{ya : a \in I\}$$

yI est l'ensemble des réels de I multipliés par y .

Plus généralement, pour f une fonction définie sur I un ensemble, on appellera *image de f* l'ensemble $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$.

Enfin, pour A, B deux ensembles, nous définissons

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

C'est l'ensemble des couples dont le premier terme est un élément de A , et le second un élément de B . On pourrait définir de même, pour $(A_i)_{i \in I}$ des ensembles,

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_j)_{j \in I} : \forall j \in I, a_j \in A_j\}.$$

Enfin, si les A_i représentent les mêmes ensembles, on notera

$$A^n = \{(a_1, \dots, a_n) : \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \in A\}.$$

Exemple. 1. Par exemple, $2\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des entiers impairs

2. $\sqrt{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+$
3. $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

Méthode: Trouver l'image d'une fonction

Pour trouver l'image d'une fonction, le plus simple est souvent d'étudier ses variations.

Exemple : l'image de $f : x \rightarrow \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

Solution. On étudie les variations de f . Il vient que f est bien définie, et est $\mathcal{C}^1$ puisque son dénominateur l'est et ne s'annule pas. En la dérivant, pour $x \in \mathbb{R}$, il vient :

$$f'(x) = \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Le dénominateur étant toujours positif, le signe de f est celui de $-e^x + e^{-x}$. Or, par croissance de l'exponentielle, ce terme est positif lorsque $x \leq 0$. Il vient :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		$\frac{1}{2}$	
	0		0

Ainsi, $f(\mathbb{R}) =]0, 1/2]$.

Exercice. Quel est l'ensemble $f(\mathbb{R})$, avec

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}?$$

1.2 Opération sur les fonctions

1.2.1 Inclusion

Définition: Inclusion

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B , et on écrit $A \subset B$, si tout élément de A appartient aussi à B , c'est-à-dire :

$$\forall x \in A, \quad x \in B.$$

Si $A \subset B$, on dit aussi que B contient A .

Exemple. — $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: les entiers naturels sont inclus dans les entiers relatifs, etc.

- Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$, alors $A \subset B$.
- Pour tout ensemble A , on a toujours $\emptyset \subset A$.

Définition: Intersection et union

Soient A et B deux ensembles.

- L'*intersection* de A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

- L'*union* de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux) :

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

1.2.2 Opérations

Définition: Somme, produit, quotient de fonctions

Soient f et g des fonctions réelles définies respectivement sur D_f et D_g , et $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit les fonctions :

$$\begin{array}{ll} \lambda f : x \mapsto \lambda f(x), & \text{définie sur } D_f, \\ f + g : x \mapsto f(x) + g(x), & \text{définie sur } D_f \cap D_g, \\ fg : x \mapsto f(x)g(x), & \text{définie sur } D_f \cap D_g, \\ \frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{f(x)}, & \text{définie sur } \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}. \end{array}$$

Définition: Composée de deux fonctions

Soient f et g des fonctions réelles définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.

On appelle *composée de f par g* la fonction

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x)),$$

définie sur D_f .

Remarque. Sous les hypothèses ci-dessus, la fonction $g \circ f$ est bien définie. En effet, pour tout $x \in D_f$, le réel $g(f(x))$ a un sens car $f(x) \in D_g$. Si cette condition n'est pas vérifiée pour tout x dans un ensemble E , on ne peut pas parler de $g \circ f$ sur E .

Exemple. Si h est la fonction $h : x \mapsto \sin(x^2 + 3)$ définie sur $\mathbb{R}$, alors $h = g \circ f$, où

$$f : x \mapsto x^2 + 3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sin x.$$

Exercice 2. On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $g : x \mapsto e^x$. Quels sont leurs ensembles de définition ? Déterminer les composées $f \circ g$ et $g \circ f$, en précisant le domaine de définition.

DANGER En général, même lorsqu'elles existent toutes les deux, $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont pas les mêmes fonctions !

1.3 La Récurrence

Définition: Principe de récurrence

On note $P(n)$ une proposition qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $P(0)$ est vraie (initialisation),
 - $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité),
- alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode: Rédaction d'une récurrence

Soit $P(n)$ la proposition (...).

Initialisation. (...) donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. (...) donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Nous avons donc montré par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Voyons un exemple concret :

Exercice. Inégalité de Bernoulli. Pour tout entier naturel n et tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, démontrer que :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. **Initialisation :** Pour $n=0$, on a :

$$(1+x)^0 = 1 \quad \text{et} \quad 1+0 \cdot x = 1,$$

donc l'inégalité est vraie pour $n=0$.

Hérédité : Supposons l'inégalité vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$. On a :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x).$$

Par l'hypothèse de récurrence et puisque $1+x \geq 0$ car $x \geq 0$:

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x).$$

Développons le membre de droite :

$$(1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x,$$

car $nx^2 \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, l'inégalité de Bernoulli est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$. $\square$

1.4 Récurrence forte

Pour certaines preuves, pour prouver la proposition $\mathcal{P}(n)$, l'hypothèse de récurrence devient $\mathcal{Q}(n) : \forall k \leq n, \mathcal{P}(k)$ est vraie.

Méthode: Récurrence forte

Pour bien rédiger une récurrence forte, on procède par quatre étapes :

- On annonce au correcteur que l'on procède par récurrence forte. Par exemple, avec une phrase comme "nous allons prouver $\mathcal{P}(n)$ par récurrence forte
- **Initialisation.** On montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \leq n$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
(...)
- Ainsi, par récurrence forte, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2^{n-1}$.

1.5 Récurrence double

Dans certains cas, une proposition $\mathcal{P}(n)$ se démontre grâce à $\mathcal{P}(n - 1)$ et $\mathcal{P}(n - 2)$. On appelle cela une *récurrence double*.

1.6 Récurrence double

Dans certains cas, une proposition $\mathcal{P}(n)$ se démontre grâce à $\mathcal{P}(n - 1)$ et $\mathcal{P}(n - 2)$. On appelle cela une *récurrence double*.

Méthode: Récurrence double

Pour bien rédiger une récurrence double, on procède par quatre étapes :

- On annonce au correcteur que l'on procède par récurrence double. Par exemple : « nous allons prouver $\mathcal{P}(n)$ par récurrence double ».
- **Initialisation.** On montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, puis que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ soient vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.
- Ainsi, par récurrence double, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1/2, \quad u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}. \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n-1}$.

2 Propriétés des fonctions

2.1 Premières techniques de preuves : preuve par équivalence

Définition: Proposition

Une proposition est une phrase mathématique qui est soit vraie, soit fausse, mais jamais les deux à la fois.

Remarque:

1. "2 est pair" ; "une suite arithmétique de raison strictement positive est strictement croissante" et "une suite géométrique de raison strictement plus grande que 1 est croissante" sont trois propositions
2. L'une des trois propositions ci-dessus est fausse, et deux autres sont vraies. Lesquelles ?
3. Notez que des phrases ambiguës ne sont jamais des propositions : "ce nombre est grand", par exemple, n'en est pas une.

Le coeur des mathématiques consiste à étudier des propositions et à établir avec certitude si elles sont vraies ou fausses. Pour ce faire, il existe différentes méthodes pour faire des preuves vraies. Nous allons voir dans cette section la méthode de la récurrence. Mais avant de la voir, il nous faut définir une des relations entre les propositions :

2.2 Connecteurs logiques

Définition: Connecteurs logiques

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

Conjonction. La proposition « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ », notée aussi $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, est la proposition qui est vraie si et seulement si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toutes les deux vraies.

Disjonction. La proposition « $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ », notée aussi $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, est la proposition qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est vraie.

Table de vérité :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Faux	Vrai
Faux	Faux	Faux	Faux

Remarque:

Le « ou » est inclusif : la proposition $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est vraie, ou $\mathcal{Q}$ est vraie, ou les deux le sont. Attention, car il a tendance à être exclusif dans la langue française ! "Fromage ou dessert", au self, dit qu'on peut prendre l'un ou l'autre, mais un mathématicien dirait qu'on peut prendre logiquement les deux.

Donnons quelques exemples concrets :

1. Un entier est pair ou impair
2. Un nombre réel est plus petit que 1 ou plus grand que 0. (Notez : il peut être les deux à la fois !)
3. $x \in \mathbb{Z}$ et $x \geq 0$ revient à dire $x \in \mathbb{N}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, n est pair ou $n + 1$ est pair.

Donnons quelques exemples ensemblistes :

1. $(x \geq 1)$ et $(x \leq 2)$ revient à dire que $x \in [1, 2]$.
2. $(x > 0)$ ou $(x < 0)$ est équivalent à $x \neq 0$.

Exercice. Ecrire sans faire intervenir les notations "et" et "ou" les propositions suivantes :

1. $x \geq 3$ et $x \leq 6$
2. $x \geq -1$ ou $x \leq 0$
3. $x \geq 0$ ou $x \in [-2, 2]$.

2.3 Implication et équivalence

Définition: Implication

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, que l'on notera $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, si, lorsque $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$.

C'est l'équivalent en français de "si ..., alors...". Par exemple, si je vois une vache monter sur une autre, alors elle est en rut. Voici la table de vérité de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

Notez quelque chose d'important : si $\mathcal{P}$ est fausse, alors $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est toujours vraie. A partir de quelque chose de faux, on peut prouver n'importe quoi ! Un exemples amusant :

$$\begin{aligned}
 0 &= 2 \\
 \Rightarrow 0 - 1 &= 2 - 1 \\
 \Rightarrow (-1)^2 &= 1^2 \\
 \Rightarrow 1 &= 1.
 \end{aligned}$$

On voit qu'on part de quelque chose de faux, qu'ensuite la proposition suivante est fausse, et enfin que la dernière proposition est vraie. Par contre, si l'on part d'une proposition vraie et que l'on procède par implication, on est sûr d'arriver à une proposition vraie.

Définition: Implication réciproque

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. L'implication réciproque de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

DANGER Attention : si une implication est vraie, sa réciproque ne l'est pas forcément. Par exemple, "Si on est une nuit de pleine lune et que le ciel est dégagé, on peut voir la nuit" est vraie, mais "on peut voir la nuit implique que nous sommes une nuit de pleine lune et que le ciel est dégagé" est faux (lumières artificielles...).

Remarque: Raisonnement par implication

La plupart du temps, à l'intérieur d'un raisonnement, on raisonnera par implication. Cela est lié aux mots "alors, donc, par conséquent, etc...".

Exemple. Démontrons la proposition suivante : si n est pair, alors n^2 est pair.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que n est pair. Alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors, $n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot 2k^2$. Puisque $2k^2$ est un entier, alors n^2 est donc pair.

On pourrait aussi écrire cette démonstration de la manière suivante :

$$n \in 2\mathbb{N} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k \Rightarrow n^2 = 2 \cdot 2k^2 \Rightarrow n^2 \in 2\mathbb{N}.$$

Notez que c'est bien moins lisible : on préférera souvent utiliser le langage naturel.

Définition: Equivalence

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ est *équivalente* à $\mathcal{Q}$, que l'on notera $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$, si lorsque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Vrai	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai

La table de vérité nous donne que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Lorsque $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie
2. Lorsque $\mathcal{Q}$ est vraie, alors $\mathcal{P}$ est vraie

Méthode: Démontrer une équivalence

Pour démontrer une équivalence, la plupart du temps, on procède par *double implication*. On rédigera ainsi : " On procède par double implication.

Tout d'abord, on suppose $\mathcal{P}$ vraie. (...). Alors, $\mathcal{Q}$ est vraie.

Supposons maintenant $\mathcal{Q}$ vraie. (...). Alors, $\mathcal{P}$ est vraie.

2.4 Monotonie

Définition: Fonction majorée, minorée, bornée

Soit f une fonction réelle définie sur E .

- ★ On dit que f est **majorée** s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \leq M$.
- ★ On dit que f est **minorée** s'il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \geq m$.
- ★ On dit que f est **bornée** si f est minorée et majorée.

Définition: Ensemble majoré, minoré, borné

Pour $I \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on dira de même que I est :

- ★ **majoré** s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $x \leq M$.
- ★ **minoré** s'il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $x \geq m$.
- ★ **borné** si I est minoré et majoré.

Rappel On définit la fonction $|\cdot| : x \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

1. Si $x \geq 0$, $|x| = x$
2. Si $x \leq 0$, $|x| = -x$

Remarques.

- La fonction f est majorée sur E (resp. minorée) si et seulement si son ensemble image $f(E) = \{f(x), x \in E\}$ est majoré (resp. minoré).
- La fonction f est bornée sur E si et seulement si $|f|$ est majorée, i.e. s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad |f(x)| \leq M.$$

Démonstration. Nous pouvons démontrer notre première équivalence de l'année! Commençons par l'implication de gauche à droite :

On suppose que f est bornée sur E . Alors, il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in E$, $m \leq f(x) \leq M$. On note $M_1 = \max(|m|, |M|)$. Alors, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leq M_1$. Nous avons prouvé que $|f|$ est majorée.

Réciproquement, si $|f|$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leq M$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $-M \leq f(x) \leq M$. Ainsi, la fonction f est à la fois majorée et minorée.

Exemples.

- La fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.
- La fonction $\cos$ sur $\mathbb{R}$ est bornée.

2.4.1 Rappel sur la valeur absolue et les inégalités

Remarque: Valeur absolue et norme

La valeur absolue est une fonction très utile! Plus tard dans l'année, nous découvrirons que c'est une distance, et même plus, une norme! Une fonction est une norme lorsqu'elle est adaptée pour parler de la "taille" de son argument. (Parler des normes de gènes et des cancers)

Remarque Culturelle: Définition Distance

Soit E un ensemble, et f une fonction de $E \times E \Rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est une distance si :

1. f est positive
2. $\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $\forall (x, y, z) \in E^3, f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z)$.

Si maintenant $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, on dira que f est une norme si

1. f est positive
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \iff x = 0$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) \leq f(x) + f(y)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = |\lambda|f(x)$

Nous allons maintenant démontrer que la valeur absolue est une norme. Nous laissons en exercice le point 1, 2, et 4, qui sont aisés. En revanche, la démonstration du point 3 est très intéressante, et fait intervenir un nouveau raisonnement, le *raisonnement par disjonction de cas*.

Définition: Raisonnement par disjonction de cas

Le **raisonnement par disjonction de cas** consiste à étudier *tous les cas possibles* d'un problème, puis à conclure en regroupant les résultats obtenus dans chaque situation. Autrement dit, si un énoncé se décompose en plusieurs situations possibles (par exemple : $x > 0$ ou $x \leq 0$), alors on prouve le résultat séparément dans chaque cas.

Proposition: Règles de calcul pour la valeur absolue

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $|xy| = |x||y|$, et, si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
2. $|-x| = |x|$

Démonstration. 1. Produit et quotient de valeurs absolues

Démontrons que, pour tous réels x et y , on a :

$$|xy| = |x| \times |y|.$$

Preuve : On distingue plusieurs cas.

- Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $|x| = x$, $|y| = y$, et $|xy| = xy = |x| \times |y|$.
- Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $|x| = -x$, $|y| = -y$, et $|xy| = |(-x)(-y)| = xy = (-x)(-y) = |x| \times |y|$.
- Si x et y sont de signes opposés, alors le produit xy est négatif, donc :

$$|xy| = -(xy) = (-x) \times y \quad (\text{si } x < 0, y > 0) \quad \text{ou} \quad x \times (-y) \quad (\text{si } x > 0, y < 0),$$

ce qui donne à chaque fois $|x| \times |y|$.

Ainsi, dans tous les cas : $|xy| = |x| \times |y|$.

Démontrons que, si $y \neq 0$,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Preuve : On utilise la propriété précédente :

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \left| x \times \frac{1}{y} \right| = |x| \times \left| \frac{1}{y} \right| = |x| \times \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}.$$

2. Opposé d'un nombre et valeur absolue

Pour tout réel x ,

$$|-x| = |x|.$$

Preuve :

- Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$, donc $|-x| = -(-x) = x = |x|$.
- Si $x \leq 0$, alors $-x \geq 0$, donc $|-x| = -x = |x|$.

Dans tous les cas, $|-x| = |x|$.

Proposition: Inégalité triangulaire

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$
 2. $|x + y| \geq |x| - |y|$ et $|x + y| \geq |y| - |x|$
- Cela s'écrit de manière plus concise $|x + y| \geq ||x| - |y||$

La démonstration du premier point est importante, et la connaître peut être utile.

Démonstration. Procédons par disjonction de cas :

On distingue plusieurs cas selon les signes de x et y .

- **Cas 1 :** $x \geq 0$ et $y \geq 0$

Dans ce cas, $|x| = x$, $|y| = y$, et $|x + y| = x + y$.

L'inégalité devient :

$$x + y \leq x + y,$$

qui est une égalité évidente.

- **Cas 2 :** $x \leq 0$ et $y \leq 0$

Alors, $|x| = -x$, $|y| = -y$, et $|x + y| = -(x + y) = -x - y$.

L'inégalité devient :

$$-x - y \leq (-x) + (-y),$$

ce qui est encore une égalité.

- **Cas 3 :** $x \geq 0$ et $y \leq 0$.

Supposons par exemple $x \geq 0$, $y \leq 0$. Alors :

$$|x| = x, \quad |y| = -y.$$

Si $x + y \geq 0$, alors $|x + y| = x + y$.

L'inégalité devient :

$$x + y \leq x + (-y),$$

soit :

$$x + y \leq x - y,$$

soit :

$$2y \leq 0.$$

Ce qui est vrai car $y \leq 0$.

Si $x + y \leq 0$, alors $|x + y| = -(x + y) = -x - y$.

L'inégalité devient :

$$-x - y \leq x - y,$$

soit :

$$-x - y \leq x - y \iff -2x \leq 0,$$

ce qui est vrai car $x \geq 0$.

- **Cas 4 :** $x \leq 0$ et $y \geq 0$. Le raisonnement du Cas 3 s'applique ici en inversant x et y .

Conclusion : Dans tous les cas, on a bien $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Démonstration. Démonstration de la seconde inégalité triangulaire.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On applique ce que nous avons prouvé ci-dessus en posant $a = x + y$ et $b = -x$, il vient :

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

soit

$$|y| \leq |x + y| + |x|,$$

donc

$$|y| - |x| \leq |x + y|.$$

On démontre l'autre point en inversant x et y .

2.5 Monotonie

Définition: Fonctions monotones, strictement monotones

Soit f une fonction réelle définie sur une partie E de $\mathbb{R}$.

★ On dit que

- ◇ f est **constante** sur E si $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = a$,
- ◇ f est **croissante** sur E si $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$,
- ◇ f est **décroissante** sur E si $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$,
- ◇ f est **strictement croissante** sur E si $\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
- ◇ f est **strictement décroissante** sur E si $\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

★ On dit que f est **monotone** sur E si f est croissante ou décroissante sur E tout entier. On parle de *stricte monotonie* lorsque la croissance ou la décroissance est stricte.

Maintenant, une proposition très importante :

Proposition: Monotonie et inégalités

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ *strictement croissante*. On a l'équivalence suivante

$$x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$

Si maintenant f est une fonction *strictement décroissante*, on a l'équivalence suivante :

$$x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$$

Par définition, il y a encore l'équivalence pour les inégalités strictes. En revanche, ces équivalences sont fausses pour des fonctions simplement croissante/décroissante. Auriez vous un contre-exemple ?

Méthode: Démonstration par contraposée

Souvenez vous de la table de vérité d'une implication !

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

On définit $\neg \mathcal{P}$ comme la proposition vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse, i.e.

$\mathcal{P}$	$\neg \mathcal{P}$
V	F
F	V

Si l'on écrit la table de vérité de $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\neg \mathcal{P}$	$\neg \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

On constate que les colonnes $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$ sont identiques.

Conclusion :

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \text{ est logiquement équivalent à } \neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}.$$

C'est ce qu'on appelle la **contraposée**.

C'est une méthode de preuve que nous allons appliquer pour démontrer la proposition sur les inégalités et la croissance des fonctions ci-dessus :

Démonstration. Pour démontrer la première équivalence, nous allons procéder par double implication :

1. On suppose que $x \leq y$. Alors, la définition de la stricte croissance nous donne que $f(x) \leq f(y)$.
2. Pour prouver l'implication réciproque, nous allons procéder par contraposée, et allons donc démontrer que $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$. Cela découle de la définition de la stricte croissance de f .

La deuxième équivalence se démontre de la même manière.

Nous allons voir ici deux éléments du cours : la négation d'une proposition, et comment manier les inégalités avec ce que nous venons de voir ci-dessus.

2.5.1 Première parenthèse : négation de proposition

Méthode: Négation d'une proposition

Pour nier une proposition, on suit les étapes suivantes :

- On échange les quantificateurs :
 - Le quantificateur $\forall$ devient $\exists$,
 - Le quantificateur $\exists$ devient $\forall$,
- On nie la proposition finale.

Exemples.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$
Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \ x + y = 0$
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$
Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$.

On en profite pour voir le point suivant :

Méthode: Démontrer une proposition avec $\forall$

Soit I un ensemble, et $\mathcal{P}(x)$ une proposition sur I . Pour démontrer $\forall x \in I, \mathcal{P}(x)$, on procède ainsi :

- Soit $x \in I$. Montrons que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- On effectue les étapes de la démonstration pour établir $\mathcal{P}(x)$.
- On conclut : $\mathcal{P}(x)$ est donc vraie. Donc $\forall x \in I, \mathcal{P}(x)$ est vraie.

que, pour tout $x \in I, \mathcal{P}(x)$ est vraie.

Si on doit démontrer une proposition avec $\exists$, eh bien, il faut chercher !

Méthode: Chercher un contre-exemple

contenu...

2.6 Négation d'une implication et raisonnement par l'absurde

Voici la table de vérité de $\neg(P \Rightarrow Q)$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Point méthode – Démonstration par l'absurde

Définition: Raisonnement par l'absurde

La démonstration par l'absurde consiste à supposer que l'énoncé que l'on veut démontrer est faux, et à aboutir à une contradiction logique. Cette contradiction peut être :

- une absurdité mathématique (comme $1 = 0$) ;
- une violation d'un fait admis (ex. : un entier est à la fois pair et impair).

Plus formellement : pour démontrer que $P \Rightarrow Q$, on peut démontrer que $\neg(\neg(P \Rightarrow Q))$, c'est à dire que $\neg(P \Rightarrow Q)$ est faux. Puisque $\neg(P \Rightarrow Q) = P$ et $\neg Q$, la démonstration se fait en écrivant "on suppose P et non Q Donc, P et non(Q) est fausse. Ainsi, on a $P \rightarrow Q$ qui est vraie.

Se même, simplement pour démontrer une proposition P , on peut démontrer que $\neg\neg P$ est vraie, soit que $\neg P$ est fausse. Pour ce faire, on suppose $\neg P$ et on cherche une absurdité logique.

Méthode: Rédiger une démonstration par l'absurde

- Supposer que la propriété est fausse.
- Dérouler les conséquences logiques de cette hypothèse.
- Arriver à une contradiction.
- Conclure que l'hypothèse est fausse, donc que la propriété initiale est vraie.

Exemple – $\sqrt{2}$ est irrationnel

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Alors il existe deux entiers relatifs a et b non nuls, premiers entre eux (i.e. $\gcd(a, b) = 1$), tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

En élevant au carré :

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2.$$

On en déduit que a^2 est pair, donc a est pair (car le carré d'un impair est impair). Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$.

Alors :

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2.$$

On en déduit que b^2 est pair, donc b est pair.

Ainsi, a et b sont tous deux pairs, donc ont un diviseur commun (au moins 2), ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle a et b sont premiers entre eux.

Conclusion. L'hypothèse de rationalité de $\sqrt{2}$ conduit à une contradiction. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

2.6.1 Permutation des quantificateurs

Dans une proposition faisant intervenir plusieurs quantificateurs, il faut faire très attention à l'ordre des quantificateurs.

À titre d'exemple :

- La proposition " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ " est vraie : pour tout réel x , on peut trouver un réel y tel que $x < y$, il suffit par exemple de choisir $y = x + 1$.
- Mais la proposition " $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$ " est fausse : on ne peut pas trouver de réel y qui soit supérieur à tous les réels.

On méditera aussi sur l'exemple suivant : la proposition "dans toutes les cerises, il y a un noyau" est bien différente de la proposition "il y a un noyau qui est dans toutes les cerises" !

Proposition: Permutation de quantificateurs

- On peut permuter deux quantificateurs universels ou deux quantificateurs existentiels sans changer la valeur de vérité de la proposition :

$$(\forall x, \forall y, \mathcal{P}(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y, \forall x, \mathcal{P}(x, y)), \text{ et } (\exists x, \exists y, \mathcal{P}(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y, \exists x, \mathcal{P}(x, y)).$$

- On ne peut pas permuter deux quantificateurs différents : en général, la proposition $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x, y))$ n'est pas équivalente à $(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x, y))$.

Remarque:

On peut donc regrouper les quantificateurs $\forall$ consécutifs ou les quantificateurs $\exists$ consécutifs. Par exemple, la proposition

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

se réécrit

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2).$$

2.6.2 Seconde parenthèse : manier les inégalités

Comme nous l'avons vu ci-dessus, pour f une fonction strictement croissante sur I et pour x, y deux éléments de I , on a l'équivalence entre $x \leq y$ et $f(x) \leq f(y)$. Nous en déduisons plusieurs points essentiels à connaître par cœur :

Remarque Culturelle: Définition des inégalités

On observe que, pour $x \in \mathbb{R}$, x peut être positif ou négatif. On définit ensuite la relation d'ordre $\geq$, pour $x, y \in \mathbb{R}$, comme suit :

$$x \geq y \text{ ssi } x - y \geq 0$$

On définit de même $\leq$.

Proposition: Opérations sur les inégalités

Soient a et b deux réels.

1. **Ajout d'un réel.** Si $a \leq b$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $a + c \leq b + c$.
2. **Multiplication par un réel.**
 - Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$: si $a \leq b$, alors $\lambda a \leq \lambda b$.
 - Si $\lambda \in \mathbb{R}_-$: si $a \leq b$, alors $\lambda a \geq \lambda b$.
3. **Passage à l'inverse.** Si $a \leq b$ et a, b sont strictement positifs (ou strictement négatifs), alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Démonstration.

1. La fonction $f : x \mapsto x + c$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc si $a \leq b$, alors $f(a) = a + c \leq f(b) = b + c$.
2. La fonction $f : x \mapsto \lambda x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, et décroissante si $\lambda \in \mathbb{R}_-$, d'où le résultat.
3. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \leq b$, alors $f(a) = \frac{1}{a} \geq f(b) = \frac{1}{b}$.
Même chose pour $\mathbb{R}_-^*$ car f est également décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

DANGER Il ne faut vraiment pas l'oublier ! Si on multiplie une inégalité par -1 , cela inverse le sens de l'inégalité.

Proposition: Somme d'inégalité

1. *Somme d'inégalité* Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + b \leq c + d$.
2. *Produit d'inégalité* Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ab \leq cd$.

Démonstration.

1. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $b - a \in \mathbb{R}_+$ et $d - c \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, $(b + d) - (a + c) = \underbrace{b - a}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{d - c}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+$, donc $a + c \leq b + d$.
Si de plus $a < b$, alors $b - a \in \mathbb{R}_+^*$, donc $b - a + d - c \in \mathbb{R}_+^*$, et $a + c < b + d$. De même pour l'autre cas.
2. On a $bd - ac = bd - bc + bc - ac = b \underbrace{(d - c)}_{\in \mathbb{R}_+} + c \underbrace{(b - a)}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+$, car $b \geq 0$ et $c \geq 0$. Ainsi, on a $0 \leq ac \leq bd$.

LA, TU METS TOUS SES TRUCS SUR LES EGALITES ET INEGALITES. AUSSI, DES EXERCICES :)

2.6.3 Retour à la monotonie

Proposition: Monotonie et somme

Si deux fonctions f et g définies sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ ont même monotonie, alors $f + g$ a la même monotonie que f et g . Si de plus l'une des deux est strictement monotone, alors $f + g$ est strictement monotone.

Démonstration. Voir TD

Exemples.

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Proposition: Monotonie et composition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g . On suppose que :

- pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$ (pour que $g \circ f$ soit une fonction bien définie),
- f et g sont monotones sur leur ensemble de définition.

Alors :

1. si f et g sont de même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante,
2. si f et g sont de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Pas forcément à apprendre par coeur, mais à savoir retrouver.

Démonstration. Montrons un des cas, les autres sont analogues, et laissés en exercice. Supposons que f et g sont décroissantes, respectivement sur D_f et D_g , et montrons que $g \circ f$ est croissante.

Soient $x, y \in D_f$ tels que $x \leq y$. Par décroissance de f , on a alors $f(x) \geq f(y)$. Par décroissance de g désormais, ceci entraîne que $g(f(x)) \leq g(f(y))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(y)$.

On a donc bien montré que $g \circ f$ est croissante.

Exemple. Considérons les fonctions $g : x \mapsto e^x$ et $f : x \mapsto -x^3$. Exprimer $g \circ f$, quelle est sa monotonie ?

Si la fonction étudiée est définie sur un *intervalle* et si la fonction est dérivable alors il existe un critère pratique, admis pour le moment.

Proposition: Monotonie et dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable sur I .

1. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I .
2. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .

On a le résultat analogue en cas de décroissance : si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$ sauf éventuellement un nombre fini de points), alors f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I .

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour dérivée la fonction f' donnée par $f'(x) = 3x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

— **Rappels sur la dérivation** $\heartsuit$: si f et g sont des fonctions dérivables sur un intervalle I , alors les fonctions λf (pour $\lambda \in \mathbb{R}$), $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) sont dérivables sur I , et :

$$(\lambda f)' = \lambda f', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (f + g)' = f' + g', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

— **Dérivée d'une composée** : si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J , et que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I , et :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

DANGER Si I n'est pas un intervalle, cela devient faux ! Par exemple, $x \rightarrow 1/x$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

DANGER IL FAUT TOUJOURS ECRIRE POUR LE CORRECTEUR QUE LA FONCTION DES DERIVABLE AVANT DE DERIVER!!!

Méthode: Etude de fonction et inégalité

1. Pour démontrer la proposition : $\forall x \in I, f(x) \geq 0$, une méthode est d'étudier les variations de f , de chercher son minimum, et de montrer que celui-ci est positif.
2. Pour démontrer la proposition : $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$, une méthode est de revenir à prouver la proposition équivalente : $\forall x \in I, f(x) - g(x) \geq 0$, puis d'étudier les variations de $f - g$, de chercher son minimum, et de montrer que celui-ci est positif.

Exercice

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x \geq \sin(x)$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

2.7 Parité, imparité, périodicité

Définition: Fonction paire, impaire

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est dite **paire** si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = f(x).$$

Graphiquement, la courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- La fonction f est dite **impaire** si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = -f(x).$$

Graphiquement, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère. On étend ces deux définitions au cas où f est définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$, qui est tel que pour tout $x \in E$, on a $-x \in E$.

Remarque: Etude de fonction et parité

Lorsqu'une fonction f définie sur E est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $E \cap \mathbb{R}_+$ puis en déduire par symétrie l'étude de f sur E entier. On prendra donc l'habitude de vérifier si une fonction est paire ou impaire avant de l'étudier.

Exemples

1. Les fonctions constantes sont paires. La fonction valeur absolue est paire. La fonction carré $x \mapsto x^2$ est paire. Plus généralement, toutes les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n pair sont paires.
2. La fonction cube $x \mapsto x^3$ est impaire. Plus généralement, toutes les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n impair sont impaires.

Définition: Fonction périodique

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est périodique s'il existe $T > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

Dans ce cas, f est dite T -périodique, et on dit que T est une *période* de f .

On étend la définition au cas où f est définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui est tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in E$ implique $x + T \in E$.

Remarque: Graphe et étude d'une fonction périodique

Le graphe d'une fonction T -périodique est invariant par translation de vecteur $T(1, 0) = (T, 0)$. Ainsi, lorsqu'une fonction est T -périodique, il suffit de l'étudier et de tracer son graphe sur un intervalle de longueur T . On complète ensuite par translation.

Exemple

- Les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques.
- Les fonctions constantes sont T -périodiques pour tout $T > 0$.

A noter Lorsqu'une fonction est T -périodique, elle est aussi $2T$ -périodique, $3T$ -périodique, etc. Cela dit, on prend l'habitude de rechercher la plus petite période possible.

Exercice. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(3x)$ est périodique.

Solution. Comme sin est 2π -périodique, on a :

$$\sin(3x) = \sin(3x + 2\pi) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x).$$

On a donc montré que f est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique sur $\mathbb{R}$.

Méthode: Etude de fonctions

Pour étudier une fonction, on suivra les étapes suivantes.

1. On détermine le domaine de définition.
2. On détermine le domaine d'étude (parité, imparité, périodicité, ...).
3. On étudie les variations (par opérations ou dérivation).
4. On calcule les limites aux bornes du domaine (si on souhaite tracer la courbe représentative ou donner le tableau des variations).
5. On dresse le tableau des variations et on trace la courbe représentative si demandé.

3 Bijection et théorème de la bijection

Définition: Injection

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *injective* si :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Autrement dit, deux éléments distincts de E ont des images distinctes.

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$ est injective, mais $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$ ne l'est pas.

Méthode: Montrer qu'une fonction est injective

- On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$ pour deux réels x_1 et x_2 de l'ensemble de départ.
- On cherche à montrer que cela entraîne $x_1 = x_2$.
- Cela revient à résoudre l'équation $f(x_1) = f(x_2)$ et à conclure que les seules solutions sont celles pour lesquelles $x_1 = x_2$.

Conclusion : Si on peut démontrer que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, alors la fonction est injective.

Définition: Surjection

Soient f une fonction réelle définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *surjective* de E sur F si :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

Autrement dit, tout élément de F est image d'au moins un élément de E .

Exemple. Le fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \rightarrow x^2$ est surjective, mais $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$ ne l'est pas.

Méthode: Montrer qu'une fonction est surjective

- On part d'un réel y appartenant à l'ensemble d'arrivée F .
- On cherche à trouver un réel x dans l'ensemble de départ E tel que $f(x) = y$.
- Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = y$ pour x en fonction de y .

Conclusion : Si on peut montrer que, pour tout $y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$, alors la fonction est surjective.

Définition: Bijection

Soient f une fonction réelle et E et F des parties de $\mathbb{R}$. On dit que f est *bijjective* de E sur F si tout élément de F admet un *unique* antécédent dans E par f :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y.$$

En d'autres termes, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x , admet une unique solution dans E .

Exemple. La fonction $f : x \mapsto 2x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En effet, si $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = 2x$ admet une unique solution, donnée par $x = \frac{y}{2}$.

De même, la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ est bijective.

DANGER On prendra garde à *toujours préciser* les ensembles E et F lorsqu'on dit qu'une fonction est bijective.

Définition: Réciproque

Soit f une fonction réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$, on note $F = f(E)$ son ensemble image. On dit qu'une fonction g définie sur F est *fonction réciproque* de f si

$$\forall x \in E, g(f(x)) = x, \quad \text{et} \quad \forall y \in F, f(g(y)) = y.$$

Proposition: Bijection et réciproque

Une fonction f est bijective de E sur F si et seulement si elle admet une fonction réciproque. Dans ce cas, cette réciproque est unique, et notée f^{-1} . Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

De plus, le graphe de f et celui de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La démonstration n'est pas à connaître.

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'implication directe.

On suppose que f est bijective de E sur F . Ainsi, pour tout $y \in F$, il existe un unique $x_y \in E$ tel que $f(x_y) = y$. On définit donc g comme la fonction qui à y donne x_y .

Soit $a \in E$. On note $f(a) = b$. Par définition, $g(b) = a$. Ainsi, $g(f(a)) = a$.

Soit $b \in F$. Alors, par bijectivité de f , il existe un unique a dans E tel que $f(a) = b$. Ainsi, par définition, $g(b) = a$. Donc, $f(g(b)) = f(a) = b$.

Nous venons de démontrer l'implication directe.

Pour l'implication réciproque, nous allons démontrer que f est injective et surjective. Soit donc $x, y \in F$ tel que $f(x) = f(y)$. En appliquant g à cette égalité, il vient :

$$x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$$

Donc, $x = y$ et f est injective.

Démontrons maintenant que f est surjective. Soit $y \in F$. Alors, $g(y) \in E$, et $f(g(y)) = y$. Donc, f est surjective.

Exemple La fonction réciproque de la bijection $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ est $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$. Quelle est la fonction réciproque de $x \mapsto x^2$?

Théorème: Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .

Si f est strictement monotone sur I , alors f est une bijection de I sur son ensemble image $f(I)$.

En particulier, si $I = [a, b]$, on a plus précisément :

- si f est strictement croissante, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$,
- si f est strictement décroissante, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

Exemples.

- La fonction $f : x \mapsto 2x$ est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.
- La fonction $g : x \mapsto \sin x$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Elle est donc bijective de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]g(0), g(\frac{\pi}{2})[$.

Remarque. Comme nous le verrons, ce résultat repose sur :

- le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que tout élément y de l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent,
- la stricte monotonie de f pour montrer que cet antécédent est unique.

Théorème: Dérivée d'une fonction réciproque

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que $f : I \rightarrow J$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , avec $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Alors la fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable, et pour tout $y \in J$, si $x = f^{-1}(y)$, on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Remarque:

La démonstration de ce théorème est admise ici. L'idée est que si l'on écrit $f(f^{-1}(y)) = y$, alors en dérivant cette relation on obtient la formule ci-dessus.

Applications :

- Pour $f(x) = e^x$, on a $f^{-1}(y) = \ln(y)$. Comme $f'(x) = e^x = y$, on retrouve :

$$(\ln y)' = \frac{1}{y}.$$

4 Fonctions usuelles

Et c'est parti!

4.1 Polynômes

4.1.1 a. Étude de $ax + b$, $a \neq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $a(x + 2) = 2x(3x - 4)$,
2. $\frac{2}{x} > \frac{4}{x + 4}$.

b. Étude de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ est la quantité $\Delta = b^2 - 4ac$.

Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	pas de solutions réelles
Forme factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a sur $] -\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ signe de $-a$ sur $]x_1, x_2[$	signe de a sur $\mathbb{R}$	signe de a sur $\mathbb{R}$

Exercice 9. Résoudre $\frac{(3x-1)(x+2)}{x+1} < (2-6x)(4x+3)$.

Exercice 10. Résoudre selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'équation

$$(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

c. Lorsque le degré est supérieur ou égal à 3

On cherche à factoriser l'expression $A(x)$ pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :

- soit on factorise directement en repérant un facteur commun,
- soit on trouve une racine évidente x_0 telle que $A(x_0) = 0$. Dans ce cas, il est possible d'écrire :

$$A(x) = (x - x_0)B(x),$$

où B est un polynôme de degré inférieur.

4.2 Partie entière

Définition: Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier est appelé la *partie entière* de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

Remarque. Ainsi, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

ou, de manière équivalente,

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

2. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- (a) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$,
- (b) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

4.3 Fonction inverse

Définition: Fonction inverse

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

- La fonction inverse est impaire.
- La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Remarque: Généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^n}.$$

- La fonction f est paire si n est pair, et impaire si n est impair.
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

4.4 Fonctions racines

Définition: Racine carrée

On sait que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, le théorème de la bijection affirme qu'elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

Elle admet donc une réciproque, qui est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, et que l'on note :

$$x \mapsto \sqrt{x}.$$

On l'appelle *fonction racine carrée*.

On sait alors que son graphe est le symétrique du graphe de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Définition: Dérivée de la fonction racine carrée

Une conséquence du théorème de dérivation de la réciproque (que nous rencontrerons plus tard) est que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que sa dérivée est donnée par :

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La formule de dérivation composée donne alors que pour toute fonction f dérivable sur D_f et à valeurs strictement positives, la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur D_f , et sa dérivée est donnée par :

$$x \mapsto \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Exemple. Donner le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 2}$, et calculer sa dérivée sur ce domaine.

Définition: Fonction racine cubique

Comme $f : x \mapsto x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, par le théorème de la bijection.

Ainsi, f admet donc une réciproque, bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note cette réciproque :

$$x \mapsto \sqrt[3]{x},$$

et on l'appelle *fonction racine cubique*.

Racine n-ième

On peut généraliser cette construction à tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$, en distinguant suivant les cas où n est pair ou impair.

Proposition: Racine n-ième

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

— Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction réciproque est la fonction racine n-ième, notée $\sqrt[n]{\cdot}$.

Elle vérifie les propriétés suivantes :

— Si n est pair, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[n]{x^n} = x$, $(\sqrt[n]{x})^n = x$, et $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

— Si n est impair, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x^n} = x$, $(\sqrt[n]{x})^n = x$, et $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

4.5 Fonctions exponentielle et logarithme népérien

4.5.1 Fonction logarithme népérien

Définition: Logarithme népérien

On définit la fonction logarithme népérien, notée $\ln$, sur $\mathbb{R}_+^*$, par :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ainsi définie, la fonction $\ln$ est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui vaut 0 en 1 (nous montrerons ce résultat dans le chapitre *Intégration*).

On en déduit les deux propriétés suivantes :

— La dérivée de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

— La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition: Propriété fondamentale du logarithme népérien

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Nous allons montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(xy) - \ln x - \ln y = 0$. On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(xy) - \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'agit donc de montrer que φ est la fonction nulle. On observe que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$

Ainsi, la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme par ailleurs $\varphi(1) = \ln y - \ln y = 0$, on a bien montré que φ est la fonction nulle. Par conséquent, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. $\square$

Proposition: Propriétés de $\ln$

- Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\ln(x^n) = n \ln(x)$.
- Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.

Ces propriétés découlent de la propriété fondamentale de $\ln$. Elles permettent en particulier de déterminer les limites de la fonction $\ln$ en 0 et en $+\infty$ (qui se déduisent d'ailleurs l'une de l'autre).

Limites de la fonction $\ln$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Démonstration. D'après les propriétés de la fonction $\ln$, on a $\ln(2^n) = n \ln 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par stricte croissance de la fonction $\ln$, on a $\ln(2) > \ln(1) = 0$, donc $\ln(2) > 0$. On en déduit alors que $\ln(2^n) \rightarrow +\infty$.

Ainsi, la fonction $\ln$ est non majorée. Comme elle est croissante, on sait alors que $\ln(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Par ailleurs, comme $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ en $x \rightarrow 0^+$, on a $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty$. Par conséquent, $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow -\infty$ en $x \rightarrow 0^+$. $\square$

4.5.2 Fonction exponentielle

Nous avons vu que la fonction logarithme népérien est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $f(\mathbb{R}_+^*)$, qui est $\mathbb{R}$ tout entier d'après les limites de $\ln$ en 0 et en $+\infty$. La fonction $\ln$ est donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème: Définition de la fonction exponentielle

On définit la fonction exponentielle, notée $\exp$, comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Il s'agit donc d'une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et on a alors

$$\exp(\ln x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(\exp x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remarque:

On a $\exp(0) = \exp(\ln 1) = 1$.

Proposition: Propriété fondamentale de l'exponentielle

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $\ln(\exp(x + y)) = x + y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = \ln(\exp(x) \exp(y))$. Comme la fonction $\ln$ est injective sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$. $\square$

Remarque : Une conséquence de cette propriété est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\exp(n) = \exp(1 + \dots + 1) = \exp(1)^n = \exp(1)^n.$$

On note $e = \exp(1)$, de sorte qu'on écrit immédiatement $\exp(x) = e^x$.

Définition: Notation de la fonction exponentielle

On introduit la notation suivante, qui trouve sa justification dans la remarque précédente. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$\exp(x) = e^x.$$

On déduit de la propriété fondamentale de l'exponentielle que les règles de la puissance s'appliquent : si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Par ailleurs, les limites de la fonction exponentielle peuvent être déduites directement des limites de la fonction logarithme népérien.

Limites de la fonction exp.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Le théorème de la bijection fournit en fait un moyen de calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction bijective, si la dérivée de cette dernière ne s'annule pas. On montre par ce procédé que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée est

$$(e^x)' = e^x.$$

Par conséquent, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque: Dérivée de $\exp(f)$

Par dérivation composée, si f est une fonction dérivable sur D_f , alors $x \mapsto \exp(f(x))$ est une fonction dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction définie sur D_f par $x \mapsto f'(x) \exp(f(x))$.

4.5.3 Fonctions puissances réelles

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on sait que

$$x^n = e^{n \ln(x)} = e^{\ln(x^n)}.$$

Ceci est d'ailleurs valable plus généralement pour $n \in \mathbb{Z}$. Nous allons généraliser cette écriture au cas où l'exposant n'est plus entier.

Définition: Fonction puissance

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

On remarque qu'on a alors $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.

Il convient de bien se souvenir qu'il s'agit d'une *notation*. On veillera donc bien à travailler avec l'écriture exponentielle lors de la manipulation d'expressions de la forme x^α .

La proposition ci-dessous montre que les règles de calcul sur les puissances sont conservées dans ce cadre plus général. La vérification de chaque point repose directement sur la définition de x^α , et est laissée en exercice.

Proposition: Généralisation des règles de calcul sur les puissances

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Définition: Fonctions puissances réelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction puissance α sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Remarque:

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Remarque:

D'après ce qui précède, les fonctions $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ et $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$, mais il faut bien noter qu'elles ne sont pas définies sur les mêmes domaines : $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$, alors que $\sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$, si n est impair, et sur $\mathbb{R}_+$ entier si n est pair.

Proposition: Dérivée des fonctions puissances réelles

La fonction puissance α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Les limites suivantes sont connues sous le nom de croissances comparées, nous les admettons pour le moment.

Proposition: Croissances comparées

i. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

ii. Pour tout $\beta > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0.$$

4.6 Fonctions trigonométriques

4.6.1 Fonctions cosinus et sinus

Rappel. On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note M_θ l'unique point du cercle trigonométrique (cercle de rayon 1 centré en O) tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_\theta}) = \theta \pmod{2\pi}$. On note alors :

$\cos \theta$: l'abscisse de M_θ , $\sin \theta$: l'ordonnée de M_θ .

On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ les fonctions sinus et cosinus par respectivement $\theta \mapsto \sin(\theta)$ et $\theta \mapsto \cos(\theta)$.

Les valeurs suivantes sont à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Proposition: Propriétés des fonctions sinus et cosinus

- Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.
- Pour tout réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Les propriétés suivantes sont à savoir retrouver à partir du cercle trigonométrique.

Proposition:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x, & \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) &= \sin x, \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x, & \sin(\pi - x) &= \sin x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) &= \cos x, \\ \cos(-x) &= \cos x, & \cos(\pi + x) &= -\cos x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x, \\ \sin(-x) &= -\sin x, & \sin(\pi + x) &= -\sin x, & \sin(\pi - x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Remarque:

Pour résoudre des équations du type $\cos x = \cos a$, ou $\sin x = \sin a$, on fait appel aux considérations de la proposition ci-dessus, que l'on retrouve facilement sur un cercle trigonométrique.

4.6.2 Résolution d'équation de type $\cos x = \cos a$ ou $\sin x = \sin a$

Si $a \in \mathbb{R}$, alors pour tous $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \cos a \quad \text{ssi} \quad x = a + 2\pi n \quad \text{ou} \quad x = -a + 2\pi n,$$

$$\sin x = \sin a \quad \text{ssi} \quad x = a + 2\pi n \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + 2\pi n,$$

où $n \in \mathbb{Z}$.

Ces équations sont parfois écrites sous la forme $\cos x = \alpha$ ou $\sin x = \alpha$. On commence alors par essayer d'écrire α sous la forme $\cos a$ ou $\sin a$.

Exemple. Résolution de l'équation $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2\pi]$.

Solution. On sait que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, l'équation se réécrit $\sin(2x) = \sin \frac{\pi}{3}$, et x est solution ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Ceci se réécrit : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Cherchons alors toutes les solutions dans $[0, 2\pi]$: en choisissant $k = 0$ ou $k = 1$, on obtient les solutions

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3}.$$

Comme les autres choix de k donnent des valeurs en dehors de $[0, 2\pi]$, ces quatre valeurs sont les seules solutions.

Les formules trigonométriques ci-dessous sont à connaître.

Proposition: Formules trigonométriques

Soient a, b deux réels.

- i. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- ii. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- iii. On en déduit les formules dites de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a), \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$$

Le premier s'écrit aussi $\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1$.

Exercice 6.

1. Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et de $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.
2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Remarques.

- La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.
- La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$.

Remarque: Une limite à connaître

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Proposition: Dérivées des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin.$$

Étude de la fonction tangente

Définition: Fonction tangente

La fonction tangente est la fonction définie par $\tan : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

Ensemble de définition

Si $x \in \mathbb{R}$, le réel $\tan x$ est bien défini si et seulement si $\cos x \neq 0$. Le domaine de définition de $\tan$ est alors

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On remarque qu'alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in D_{\tan}$ si et seulement si $x + \pi \in D_{\tan}$.

Domaine d'étude

On remarque d'emblée que la fonction $\tan$ est 2π -périodique. En fait, elle est même π -périodique : en effet, si $x \in D_{\tan}$, alors

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

On peut donc restreindre l'étude de la fonction $\tan$ à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Le reste du graphe de $\tan$ se déduira par périodicité.

On remarque par ailleurs que la fonction tangente est **impaire** : en effet, pour tout $x \in D_{\tan}$,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

On peut donc finalement restreindre l'étude de la fonction à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$. Le graphe de $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ se déduira par symétrie par rapport à l'origine.

Limites aux bornes

Calculons les limites aux bornes de l'intervalle d'étude $[0, \frac{\pi}{2}[$:

— On a $\tan 0 = 0$.

— On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow +\infty$ car $\sin x \rightarrow 1$ et $\cos x \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$.

Variations

Comme $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos$ ne s'annule pas sur cet intervalle, la fonction $\tan$ est dérivable également sur l'intervalle. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ainsi,

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Dérivée de $\tan$. On retiendra que $\tan$ est dérivable sur $D_{\tan}$, et pour tout $x \in D_{\tan}$,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Comme $\tan'$ est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que $\tan$ est strictement croissante sur cet intervalle. On peut maintenant tracer le graphe de $\tan$ sur tout $D_{\tan}$.

Propriétés

Récapitulons.

1. $\tan$ est définie sur $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. Elle est impaire et π -périodique.
3. Elle est dérivable sur $D_{\tan}$ et

$$\forall x \in D_{\tan}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$$

5.

$$\tan(0) = 0, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

6.

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

Fonction arctangente

La fonction tangente est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et strictement croissante sur cet intervalle. On a vu

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty.$$

Par le théorème de la bijection, la fonction tangente réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition: Fonction arctangente

La fonction arctangente, notée $\arctan$, est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Remarque:

Pour tout réel x ,

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

et

$$\tan(\arctan x) = x.$$

Proposition: Dérivée de la fonction arctangente, admise pour le moment

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Valeurs particulières et limites

$$\arctan(0) = 0,$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

5 Trois derniers types de raisonnement

5.1 Raisonnement par analyse-synthèse

Un raisonnement plus rare, mais qui peut apparaître : le **raisonnement par analyse-synthèse**. Ce type de raisonnement est particulièrement utile pour démontrer des assertions de la forme « il existe... tel que... ».

Méthode: Raisonnement par analyse-synthèse

- **Analyse** : on suppose que l'on a la conclusion et on cherche les conditions nécessaires pour qu'elle soit vraie ;
- **Synthèse** : on repart des hypothèses, et l'on vérifie que ces conditions nécessaires suffisent bien à établir la conclusion.

Énoncé. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Analyse

On cherche à décomposer une fonction f en la somme de deux fonctions g et h , avec :

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

où g est paire et h est impaire. Cela signifie que :

$$g(-x) = g(x) \quad \text{et} \quad h(-x) = -h(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remplaçons x par $-x$ dans l'égalité $f(x) = g(x) + h(x)$:

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x),$$

puis ajoutons et soustrayons membre à membre les deux égalités :

$$f(x) + f(-x) = g(x) + h(x) + g(x) - h(x) = 2g(x),$$

$$f(x) - f(-x) = g(x) + h(x) - g(x) + h(x) = 2h(x).$$

On en déduit que :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On a donc obtenu une expression candidate pour la fonction paire g et la fonction impaire h , en fonction de f .

Synthèse

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Définissons deux fonctions g et h par :

$$g(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On vérifie que g est paire :

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x).$$

Et que h est impaire :

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

Enfin, on a bien $f(x) = g(x) + h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion

Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme :

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

où la première fonction est paire et la seconde est impaire.

6 Représentation graphique d'une fonction

Définition: Tangente à une courbe en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un réel $a \in I$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Son équation est donc :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Définition: Point d'inflexion

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I . On dit que $a \in I$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si la concavité de la courbe change au point a , c'est-à-dire si la dérivée seconde f'' change de signe en a .

Autrement dit, la courbe passe d'une convexité à une concavité ou inversement en ce point.

Méthode: Représenter graphiquement une fonction

Voici les principales étapes pour représenter le graphe d'une fonction f définie sur un intervalle I :

- **Déterminer le domaine de définition** de f .
- **Étudier les limites** de f aux bornes de I (et en tout point où f pourrait être discontinue).
- **Calculer la dérivée f'** , puis **étudier le signe de f'** pour déterminer les variations de f .
- **Déterminer les extremums locaux** (valeurs maximales ou minimales) à l'aide du tableau de variations.
- **Étudier la convexité** de f grâce à la dérivée seconde f'' , et repérer les éventuels **points d'inflexion**.
- **Tracer la courbe** en plaçant les points remarquables (intersections avec les axes, extremums, points d'inflexion, etc.), et en respectant les comportements asymptotiques et les variations.

7 Tableau récapitulatif des dérivées

Fonction	Dérivée
k avec $k \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^n avec $n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$ (sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$)	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan x$ (sur $\mathbb{R}$)	$\frac{1}{1+x^2}$

Règle de dérivation	Formule
$(u + v)'$	$u' + v'$
$(uv)'$	$u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$ (si $v \neq 0$)
$\left(\frac{1}{u}\right)'$	$-\frac{u'}{u^2}$ (si $u \neq 0$)
$(u \circ v)'$	$(u' \circ v) \cdot v'$