

Exercices du chapitre 0 : Les bases

1 Écriture mathématique

Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. À tout réel, on peut trouver un réel qui lui soit strictement inférieur.
2. Tout réel non nul est l'inverse d'un unique réel non nul.
3. La fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas la fonction constante égale à 1.
4. Tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers naturels.¹
5. Pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en entiers naturels non nuls.²
6. Si un réel positif est inférieur ou égal à tout autre réel strictement positif, alors il est nul.

2 Négation

Donner la négation de chacune des phrases suivantes :

1. Tous les élèves de cette classe sont des filles.
2. Il a fait beau tous les jours de la semaine.
3. Il existe une copie de dissertation de philosophie sans faute d'orthographe.

3 Négation (avec formalisme)

Donner la négation logique de chacune des assertions suivantes :

1. $x \in [-1, 2[$
2. $\forall x \in E, x^2 \geq 5$ (où E est un ensemble de nombres réels)
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$
4. $\exists T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$ (où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$)

¹Ce théorème a été conjecturé par Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638, français) en 1621, mais c'est Joseph-Louis Lagrange (1736-1813, né italien, naturalisé français) qui le démontra en 1770. Aujourd'hui il porte le nom de théorème des 4 carrés de Lagrange.

²Bien que Pierre de Fermat (vers 1607-1665) ait indiqué, dans la marge de l'*Arithmetica* de Diophante, en avoir trouvé « une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir », il a fallu attendre les travaux d'Andrew Wiles pour que cet énoncé soit démontré.

-
5. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10 \Rightarrow u_n \geq 10^4$ (où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite)
 6. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, 4 \leq u_n \leq 5$ (où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite)
 7. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon$ (où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite)
 8. $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ (où f est une fonction)

4 Récurrence

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + n^2$ est pair.
2. Proposer une autre démonstration de ce résultat.

5 Récurrence & terme général

1. Considérons la suite (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = n^2 + 1$.

2. Considérons (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

3. Considérons (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = 6, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = (n + 1) \cdot 3^n$.

6 Inégalité de Bernoulli

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

7 Disjonction de cas

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

8 Irrationalité de $\sqrt{2}$

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

³C'est la définition de f continue en 0 ! Nous verrons cela plus tard dans l'année

● ● ○ ○ 9 Écart entre trois réels

Soient x_0, x_1, x_2 trois réels de l'intervalle $[0; 1]$ tels que : $x_0 \leq x_1 \leq x_2$.

Montrer qu'au moins une des quantités $x_1 - x_0$ et $x_2 - x_1$ est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

● ● ○ ○ 10 Équations et inéquations

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 \geq 5$

2. $-(x+3)^2 \geq -4$

3. $x^2 > x$

4. $\frac{x+2}{-x+3} \geq 0$

5. $\frac{x+2}{x-3} \geq 1$

6. $\sqrt{x+2} = x$

7. $\sqrt{2x+3} = x-6$

8. $-\frac{1}{2}x + 1 \leq \sqrt{x^2 - x - 2}$

● ● ○ ○ 11 Inégalité sur les racines carrées

Démontrer, pour $a, b \geq 0$: $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

● ○ ○ ○ 12 Une égalité pour tout entier

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer : $(\forall n \in \mathbb{N}, a 2^n + b 3^n = a) \iff a = b = 0$.

● ○ ○ ○ 13 Équivalence ?

1. Démontrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b \text{ et } c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d$.

2. L'implication réciproque est-elle également valable pour tous réels a, b, c, d ?

3. Que penser de l'affirmation suivante : $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (a + c \leq b + d) \Rightarrow (a \leq b \text{ ou } c \leq d)$?

● ● ● ○ 14 Nul ?

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon) \iff a = 0$.

• • • ◯ **15 Équation fonctionnelle**

Démontrer que la fonction identité est la seule fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x$.

• • • • **16 Équations fonctionnelles**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1+x$.
2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(y-f(x)) = 2-x-y$.
3. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y)-f(xy) = x+y$.